1 Nombre dérivé, interprétations géométrique et cinématique

1. Nombre dérivé

• Soit f une fonction numérique, définie sur un intervalle ou une réunion d'intervalles, dont a est un élément.

> Le nombre dérivé en a de f est la limite finie, si elle existe, du taux d'accroissement de f en a.

On note $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$ ou bien en posant $x = a + h$:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a).$$

Remarque : *si la limite du taux d'accroissement en a est infinie ou n'existe pas, alors la fonction f n'est pas dérivable en a.*

• Dire que la fonction f est dérivable en a, de nombre dérivé $f'(a)$ signifie que pour tout h suffisamment proche de zéro, on peut écrire :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h)$$

où φ est une fonction telle que $\lim\limits_{h \to 0} \varphi(h) = 0$.

On en déduit une approximation de $f(a+h)$ appelée **approximation affine tangente :** $f(a+h) \approx f(a) + hf'(a)$.

2. Interprétation géométrique

● Interprétation du nombre dérivé

Soit $\mathrm{A}(a\,;\,f(a))$ un point de la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f, dérivable en a.

> Le nombre dérivé $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente T_{A} en A à la courbe $\mathscr{C}$.
> La tangente T_{A} a pour équation : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

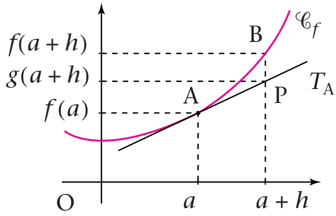
● Interprétation de l'approximation affine tangente

Soit g la fonction affine dont la représentation graphique est T_{A} :

$g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$ d'où $g(a+h) = hf'(a) + f(a)$.

Le réel $g(a+h)$ est l'approximation affine tangente de f en a.

L'approximation affine tangente consiste à approcher $f(a+h)$ (ordonnée de B) par $g(a+h)$ (ordonnée de P), quand h est voisin de zéro, donc lorsque le point B sur $\mathscr{C}_f$ est voisin de P sur T_A.



3. Interprétation cinématique du nombre dérivé

Un mobile se déplace sur un axe. On note $x(t)$ la distance qu'il a parcourue à l'instant t.

La vitesse instantanée du mobile à l'instant t_0 est la limite des vitesses moyennes $\dfrac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}$ lorsque h tend vers zéro.

Cette limite est donc le nombre dérivé de la fonction x en t_0.

Exemple d'application

1. La fonction $f: x \mapsto x\sqrt{x}+x+1$, est-elle dérivable en zéro ?

2. En déduire une approximation affine tangente de $f(0{,}002)$.

Corrigé commenté

1. ***Indication :*** *on commence par expliciter le taux d'accroissement de f en zéro et on simplifie cette écriture si possible.*

$$h \neq 0 \,; \quad \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{(h\sqrt{h}+h+1)-1}{h} = \frac{h\sqrt{h}+h}{h} = \sqrt{h}+1.$$

Indication : *ensuite on calcule la limite de ce taux quand h tend vers zéro :*

$\lim\limits_{h \to 0}(\sqrt{h}+1) = 1$, *on en déduit que f est dérivable en zéro et que* $f'(0) = 1$.

2. $f(0+h) \approx f(0)+hf'(0)$ soit $f(h) \approx 1+h \times 1$; or $h = 0{,}002$,

donc $f(0{,}002) \approx 1+0{,}002$ soit $f(0{,}002) \approx 1{,}002$.

Remarque : *la calculatrice donne* $f(0{,}002) \approx 1{,}002089$ *l'approximation trouvée par le calcul est très bonne, facile à trouver sans faire beaucoup de calculs.*

2 Différentielle d'une fonction en un point

1. Lien entre dérivabilité et accroissements de x et de y

Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.
Si f est dérivable en a, alors $f(a+h) = f(a) + f'(a) \times h + h\varphi(h)$ avec $\lim_{0} \varphi = 0$.

On pose $h = x - a = \Delta x$ et $\Delta y = f(x) - f(a) = f(a+h) - f(a)$.
Donc $f(a+h) - f(a) = hf'(a) + h\varphi(h)$ avec $\lim_{0} \varphi = 0$,

soit $$\boxed{\Delta y = f'(a)\Delta x + \Delta x \varphi(\Delta x)}$$

2. Application et notation différentielles

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I contenant un réel a :
$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h)$ avec $\lim_{0} \varphi = 0$.

> On appelle différentielle de f en a l'application : $h \mapsto hf'(a)$.
> On note $\mathrm{d}y = f'(a)\mathrm{d}x$.

3. Lien entre dérivation et continuité

Soit f une fonction définie sur un intervalle I contenant un réel a. Si f est dérivable en a, il existe donc un nombre dérivé $f'(a)$ et une fonction φ tels que :
$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + h\varphi(h)$ avec $\lim_{0} \varphi = 0$ donc :
$\lim_{h \to 0} [f(a+h) - f(a)] = 0$ ou bien $\lim_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.
Cela signifie que la fonction f est continue en a.
Toute fonction dérivable en *a* est continue en *a*.
Si f est dérivable sur un intervalle I, alors f est continue sur I.

Exemples d'application

1 Quelle est l'application différentielle de la fonction $f : x \mapsto x^3 - x + 2$ en 3 ?

Corrigé commenté

Indication : *on commence par expliciter le taux d'accroissement de f en 3 et on simplifie cette écriture si possible.*

Si $h \neq 0$; $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{(3+h)^3-(3+h)+2-(27-3+2)}{h}$

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{27+9h^2+27h+h^3-3-h+2-26}{h}$$

soit $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{h^3+9h^2+26h}{h} = h^2+9h+26.$

Indication : *ensuite on calcule la limite de ce taux quand h tend vers zéro :* $\lim\limits_{h \to 0}(h^2+9h^2+26) = 26.$

Donc la fonction différentielle de f en 3 est telle que $\boxed{\mathrm{d}y = 26\mathrm{d}x.}$

2 Quelle est l'application différentielle de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ en 1 ?

Corrigé commenté

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ car $x^2+1>0$.

$\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \dfrac{\sqrt{(1+h)^2+1}-\sqrt{2}}{h} = \dfrac{\sqrt{h^2+2h+2}-\sqrt{2}}{h}$ avec $h \neq 0$.

Indication : *il y a indétermination de la limite en zéro, donc on change la forme en multipliant numérateur et dénominateur par l'expression conjuguée du numérateur.*

$$\frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \frac{h^2+2h+2-2}{h(\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2})} = \frac{h(h+2)}{h(\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2})}$$

soit $\dfrac{g(1+h)-g(1)}{h} = \dfrac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2}}$ car $h \neq 0$,

or $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h+2}{\sqrt{h^2+2h+2}+\sqrt{2}} = \dfrac{2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $\boxed{\mathrm{d}y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{d}x.}$

3 Soit la fonction f affine par intervalles définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x-1 & \text{si } x \in]-\infty\ ;\ 3[\\ f(x) = -x+8 & \text{si } x \in [3\ ;\ +\infty[. \end{cases}$$

La fonction f est-elle continue en 3 ?

Corrigé commenté

$f(x) = -3+8 = 5$ et $f(3+h) = 2(3+h)-1 = 5+2h$ où $h<0$.

$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <0}} f(3+h) = 5.$

$\lim\limits_{\substack{h \to 0 \\ <0}} f(3+h) = f(3) = 5$ donc la fonction f est continue en 3.

3 Fonction dérivée et fonctions primitives

1. Fonction dérivée

Si une fonction f est définie et dérivable pour tout réel a d'un intervalle I, alors f est dérivable sur cet intervalle.

> La fonction qui à tout réel a associe, s'il existe, le nombre dérivé $f'(a)$ est la fonction dérivée notée f' de la fonction f.

La fonction f' est telle que : $f' : \begin{array}{l} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{array}$.

La fonction f' est aussi appelée dérivée première de f.
Si la fonction f' est dérivable sur un intervalle I, sa dérivée est la dérivée seconde de f notée f'' et ainsi de suite ; on note $f^{(n)}$ la dérivée $n^{\text{ième}}$ de f.

2. Fonctions primitives

- Soit f une fonction continue sur un intervalle I.

> On appelle primitive de f sur I toute fonction F, dérivable sur I, telle que pour tout réel x de I on ait $F'(x) = f(x)$.

- Toute fonction continue sur un intervalle admet une infinité de primitives sur cet intervalle.

- Deux de ces primitives diffèrent d'une constante.

Si F et G sont deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I :

$$\boxed{(F' = G' = f) \Leftrightarrow \forall x \in \mathrm{I}, \quad G(x) = F(x) + C \text{ avec } C \in \mathbb{R}.}$$

- Si F est une primitive de f sur un intervalle I, l'ensemble des primitives est l'ensemble des fonctions : $\begin{array}{l} \mathrm{I} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto F(x) + C \end{array}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

- Si la fonction f est la fonction nulle sur I, alors les primitives de f sur I sont des fonctions constantes.

- Il existe une et une seule primitive F, d'une fonction f continue sur un intervalle I, telle que pour un réel a donné on ait $F(a) = b$.

Théorème : Si la fonction f est continue sur un intervalle I, et si a et un réel de I, la fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exemples d'application

1 Montrer, sans calcul de dérivées, que les foncions f et g, définies sur l'intervalle $]-2\ ;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$ et $g(x)=\dfrac{x^2-x-3}{x+2}$, sont deux primitives d'une même fonction.

Corrigé commenté

Indication : *sans calculer les dérivées f' et g', pour montrer que f et g sont deux primitives d'une même fonction, il suffit de montrer que $f(x)-g(x)$ est une constante.*

$$f(x)-g(x)=\frac{x^2-1}{x+2}-\frac{x^2-x-3}{x+2}=\frac{x^2-1-x^2+x+3}{x+2}$$

$f(x)-g(x)=\dfrac{x+2}{x+2}$, or $x\neq-2$ donc $f(x)-g(x)=1$.

Les fonctions f et g sont bien des primitives d'une même fonction.

En effet $f'(x)-g'(x)=0$ soit $f'(x)=g'(x)$ pour tout réel x de $]-2\ ;+\infty[$.

2 Parmi les fonctions F, G et H suivantes, quelles sont les primitives d'une même fonction sur $]-\infty\ ;-1[$?

$$F(x)=\frac{x-1}{x+1}\ ;\ G(x)=4-\frac{2}{x+1}\ \text{et}\ H(x)=\frac{5x-3}{2x+2}.$$

Corrigé commenté

En calculant les dérivées des fonctions F, G et H, celles qui ont la même dérivée sont des primitives d'une même fonction sur un même intervalle (voir le tableau des dérivées page 114).

- $F'(x)=\dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.
- $G'(x)=-2\left(\dfrac{-1}{(x+1)^2}\right)=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.
- $H(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5x-3}{x+1}\right)$ d'où $H'(x)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{5(x+1)-(5x-3)}{(x+1)^2}\right)=\dfrac{8}{2(x+1)^2}$

donc $H'(x)=\dfrac{4}{(x+1)^2}$.

Les fonctions F et G ont la même dérivée sur $]-\infty\ ;-1[$, donc elles sont des primitives de $x\mapsto\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

4 Dérivées et primitives des fonctions usuelles

Tableau des dérivées et primitives usuelles :

a pour primitive

a pour fonction dérivée

	Intervalle I	
$x \mapsto a \quad (a \in \mathbb{R})$	$\mathrm{I} = \mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto ax + b \quad (a \in \mathbb{R}), (b \in \mathbb{R})$	$\mathrm{I} = \mathbb{R}$	$x \mapsto a$
$x \mapsto x^n$	$n \in \mathbb{Z}_-^* \begin{cases} \mathrm{I} = \mathbb{R}_+^* \\ \text{ou} \\ \mathrm{I} = \mathbb{R}_-^* \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$
$x \mapsto \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$	$n \in \mathbb{Z} - \{-1\} \begin{cases} \mathrm{I} = \mathbb{R}_+^* \\ \text{ou} \\ \mathrm{I} = \mathbb{R}_-^* \end{cases}$ $n \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{I} = \mathbb{R}$	$x \mapsto x^n$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \ln\lvert x\rvert$	$\mathrm{I} = \mathbb{R}_+^*$ ou $\mathrm{I} = \mathbb{R}_-^*$	$x \mapsto \dfrac{1}{x}$
$x \mapsto \mathrm{e}^x$	$\mathrm{I} = \mathbb{R}$	$x \mapsto \mathrm{e}^x$
$x \mapsto \cos x$	$\mathrm{I} = \mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$
$x \mapsto \sin x$	$\mathrm{I} = \mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$
$x \mapsto \tan x$	$\mathrm{I} = \left]k\dfrac{\pi}{2} \,;\, (k+1)\dfrac{\pi}{2}\right[$ avec $k \in \mathbb{Z}$	$x \mapsto \dfrac{1}{\cos^2 x}$ ou $x \mapsto 1 + \tan^2 x$

Remarque : *à l'aide du tableau, on obtient pour chaque fonction une primitive ; celle pour laquelle la constante est nulle.*

Exemples d'application

1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - \sin x + \frac{1}{2}$.

1. Sachant que la dérivée d'une somme de fonctions est égale à la somme des fonctions dérivées, calculer la dérivée de la fonction f.

2. Sachant que U, V et W sont des primitives de u, v et w sur I, alors $U + V + W$ est une primitive de $u + v + w$ sur I ; calculer la primitive F de f telle que $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.

Corrigé commenté

1. Sur $\mathbb{R}$, $\boxed{f'(x) = 2x - \cos x.}$

2. ***Indication :*** *pour déterminer la primitive F de f telle que* $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$, *on commence par écrire toutes les primitives de f sur* $\mathbb{R}$.

Ce sont toutes les fonctions : $x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + \cos x + \frac{1}{2}x + C$ avec $C \in \mathbb{R}$.

Indication : *la détermination de F revient à trouver la valeur de C telle que* $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$,

soit $\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^3 + \cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{2} + C = -1$ d'où $C = -\frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4} - 1$;

donc $\boxed{F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \cos x + \frac{1}{2}x - \frac{\pi^3}{24} - \frac{\pi}{4} - 1.}$

2 Calculer les dérivées respectives des fonctions f et g suivantes définies sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x^3} + 2\sqrt{x} - 2\cos x + x^3 \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x^4 - 5x^2 + 3x}{x}.$$

Corrigé commenté

Conseil : *Avant d'entreprendre des calculs il faut voir si un changement d'écriture permet des calculs plus faciles.*

$f(x) = x^{-3} + 2\sqrt{x} - 2\cos x + x^3$ et $g(x) = 2x^3 - 5x + 3$ d'où :

$f'(x) = -3x^{-4} + \frac{2}{2\sqrt{x}} + 2\sin x + 3x^2$ et $g'(x) = 6x^2 - 5$ donc :

$$\boxed{f'(x) = -\frac{3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2\sin x + 3x^2} \quad \text{et} \quad \boxed{g'(x) = 6x^2 - 5.}$$

5 Opérations sur les fonctions dérivables

Tableau des dérivées et des primitives des fonctions dérivables.
Soit deux fonctions u et v définies et dérivables sur un même intervalle I, dont les dérivées sont continues sur I.

a pour primitive

a pour dérivée

$u + v$	$u' + v'$
kf $k \in \mathbb{R}^*$	kf'
uv	$u'v + uv'$
u^n $(n \in \mathbb{Z}^*,\ u(x) \neq 0 \text{ si } n < 0)$	$nu^{n-1} \times u'$
$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ $(n \in \mathbb{Z} - \{-1\},\ u(x) \neq 0 \text{ si } n < -1)$	$u' \times u^n$
$\dfrac{u}{v}$ $(v(x) \neq 0)$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$
$u \circ v$	$(u' \circ v) \times v'$
e^u	$u'e^u$
$\dfrac{u'}{u}$ $(u(x) \neq 0)$	$\ln\lvert u\rvert$

Remarque : *à l'aide du tableau on obtient pour chaque fonction une primitive ; celle pour laquelle la constante est nulle.*

Exemples d'application

1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x-3)^4.$$

1. Calculer la dérivée de f.
2. Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Corrigé commenté

1. ***Indication :*** *avant d'effectuer des calculs, il faut reconnaître une des formes « types » permettant de dériver.*

$f = u^4$ avec $u(x) = 2x-3$ donc $f' = \mathbf{4u^3u'}$ avec $u'(x) = 2$; par suite pour tout réel x on a $f'(x) = 4(2x-3)^3 \times 2$ soit $\boxed{f'(x) = 8(2x-3)^3.}$

2. ***Indication :*** *de même on doit reconnaître une forme « type » pour chercher une primitive.*

On pose $u(x) = 2x-3$ donc $u'(x) = 2$ d'où $f = \frac{1}{2}\mathbf{u'u^4}$ donc les primitives de f sont de la forme $\frac{1}{2} \times \frac{u^5}{5} + C$ avec $C \in \mathbb{R}$ donc pour tout réel x $\boxed{F(x) = \frac{1}{10}(2x-3)^5 + C.}$

2 Calculer la fonction dérivée de la fonction g définie et dérivable pour tout $x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ $(k \in \mathbb{Z})$ par $g(x) = \tan(4x+2)$.

Corrigé commenté

Indication : *on reconnaît l'écriture d'une fonction composée $u \circ v$ avec $u(x) = \tan x$ et $v(x) = 4x+2$.*

Or, $(u \circ v)' = (u' \circ v) \times v'$ avec $u'(x) = \tan^2 x + 1$ et $v'(x) = 4$,
donc $g'(x) = [\tan^2(4x+2)+1] \times 4$,

soit $\boxed{g'(x) = 4\tan^2(4x+2) + 4.}$

6 Applications de la dérivation

1. Sens de variation

Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.

- Si la dérivée f' est (strictement) positive sur I, sauf peut-être en un nombre fini de points isolés où elle s'annule, alors f est (strictement) croissante sur I.
- Si la dérivée f' est (strictement) négative sur I, sauf peut-être en un nombre fini de points isolés où elle s'annule, alors f est (strictement) décroissante sur I.
- Si la dérivée f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.

Remarque : *ces résultats deviennent faux si I n'est pas un intervalle.*

2. Extremum d'une fonction

- Si la fonction f est définie et dérivable sur un intervalle ouvert I et si f' s'annule et change de signe en x_0, alors f admet un extremum (maximum ou minimum) en x_0. Cet extremum est égal à $f(x_0)$.
- Si la fonction f est définie et dérivable sur un intervalle ouvert I et si f admet un extremum en x_0, alors f' s'annule en x_0.

Remarque : *si la dérivée s'annule en x_0, sans changer de signe, alors la fonction n'admet pas d'extremum en x_0.*

Toutefois la courbe $\mathscr{C}_f$ admet au point $M_0(x_0, f(x_0))$ une tangente horizontale.

Exemples d'application

Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)^3(x+3)$.

Corrigé commenté

La fonction f est une fonction polynôme donc elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Indication : *pour étudier le sens de variation de f, on calcule sa dérivée f'.*

La fonction f est le produit de deux fonctions :

$f = uv$ avec $u(x) = (x+1)^3$ et $v(x) = x+3$.

$f' = u'v + uv'$, or $u = w^3$ donc $u' = 3w^2w'$

avec $w(x) = x+1$ et $w'(x) = 1$. De plus, $v'(x) = 1$, d'où $f' = 3w^2w'v + w^3$.

Pour tout réel x, $f'(x) = 3(x+1)^2(x+3) + (x+1)^3$.

Indication : *on veut étudier le signe de $f'(x)$ donc il faut factoriser $f'(x)$;*

$$f'(x) = (x+1)^2[3(x+3)+(x+1)]$$

donc $f'(x) = (x+1)^2(3x+9+x+1)$

soit $f'(x) = (x+1)^2(4x+10) = 2(x+1)^2(2x+5)$.

Indication : *on remarque que $2(x+1)^2 \geqslant 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2x+5$.*

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2x+5 > 0 \Leftrightarrow x > -\dfrac{5}{2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (2x+5=0 \text{ ou } x+1=0) \Leftrightarrow \left(x = -\dfrac{5}{2} \text{ ou } x = -1\right)$

$f'(x) < 0$ sur $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{5}{2}\right[$ et $f'\left(-\dfrac{5}{2}\right) = 0$ donc :

***f* est strictement décroissante sur** $\left]-\infty\,;\,-\dfrac{5}{2}\right]$.

$f'(x) > 0$ sur $\left]-\dfrac{5}{2}\,;\,-1\right[\cup \left]-1\,;\,+\infty\right[$ et $f'(-1) = 0 = f'\left(-\dfrac{5}{2}\right)$ donc **la fonction *f* est strictement croissante sur** $\left[-\dfrac{5}{2}\,;\,+\infty\right[$.

La dérivée f' s'annule et change de signe en $-\dfrac{5}{2}$ donc f admet un minimum égal à $f\left(-\dfrac{5}{2}\right)$ soit $-\dfrac{27}{16}$.

La dérivée f' s'annule sans changer de signe en -1, donc f n'admet pas d'extremum en -1.

La courbe admet deux tangentes horizontales d'équations respectives :

$$y = -\frac{27}{16} \quad \text{et} \quad y = 0.$$

7 Résolution de l'équation $f(x) = k$

1. Tableau de variation

Après avoir étudié les variations d'une fonction f et avoir calculé les limites aux bornes de son ensemble de définition, on regroupe ces résultats dans un tableau de variation.
On conviendra que dans ces tableaux, les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

2. Corollaire ou théorème dit des valeurs intermédiaires

Si une fonction f est continue, strictement monotone sur un intervalle $[a, b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ a une solution unique dans $[a, b]$.

Remarque : *on étendra ce corollaire aux cas où f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant connues.*

On pourra approcher la solution de l'équation $f(x) = k$ par dichotomie ou par balayage à l'aide de la calculette.

Exemple d'application

Montrer que l'équation $x^3 - 5x^2 + 3x + 2 = 0$ admet des solutions dans $\mathbb{R}$.

Corrigé commenté

> ***Indication :*** *on vérifie que l'expression proposée n'est pas factorisable, qu'elle n'est pas le développement d'une identité remarquable, que l'équation n'a pas de solutions évidentes* (–2 ; –1 ; 0 ; 1 ; 2). *Si toutes ces investigations sont négatives, alors on considère la fonction f telle que $f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x + 2$.*

Résoudre l'équation proposée revient à résoudre $f(x) = 0$.
$f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$.

> ***Indication :*** *le signe de $f'(x)$ est celui d'un trinôme du second degré.*

Le discriminant est $\Delta = 64$ et les racines sont $x_1 = \frac{10+8}{6} = 3$ et $x_2 = \frac{10-8}{6} = \frac{1}{3}$.

Le signe d'un trinôme du second degré est celui du coefficient de x^2 sauf entre les racines.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right[\cup \left]3\ ;\ +\infty\right[$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right[$ et sur $\left]3\ ;\ +\infty\right[$.

$f'(x) \leqslant 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{1}{3}\ ;\ 3\right]$, donc la fonction f est strictement décroissante sur cet intervalle car elle ne s'annule qu'en deux points isolés, $\frac{1}{3}$ et 3.

On détermine sans difficulté que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

On dresse le tableau des variations de f.

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	$\frac{67}{27}$	↘	-7	↗	$+\infty$

Indication : *les flèches obliques dans le tableau traduisent la continuité et la stricte monotonie de f sur chacun des intervalles* $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right]$; $\left[\frac{1}{3}\ ;\ 3\right]$ et $\left[3\ ;\ +\infty\right[$.

Nous utilisons le corollaire du théorème dit des valeurs intermédiaires.

Or, zéro appartient à chacun des intervalles images $\left]-\infty\ ;\ \frac{67}{27}\right]$; $\left[-7\ ;\ \frac{67}{27}\right]$ et $\left[-7\ ;\ +\infty\right[$. Donc $\boldsymbol{f(x) = 0}$ **a trois solutions** :

α dans $\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{3}\right]$, β dans $\left[\frac{1}{3}\ ;\ 3\right]$ et γ dans $\left[3\ ;\ +\infty\right[$.

À l'aide de la calculette on trouve que :

$$-0{,}4 < \alpha < -0{,}3\ ;\quad 1{,}2 < \beta < 1{,}3 \text{ et } 4{,}1 < \gamma < 4{,}2.$$