

# 1 Ensemble de définition et réductions éventuelles

## 1. Ensemble de définition

• Dans  $\mathbb{R}$ , les **intervalles** sont les ensembles suivants où  $a < b$  :

- intervalles ouverts :  $]-\infty ; a[$  ;  $]a ; b[$  ;  $]b ; +\infty[$  ;
- intervalles fermés :  $]-\infty ; a]$  ;  $[a ; b]$  ;  $[b ; +\infty[$  ;
- intervalles semi-ouverts ou semi-fermés :  $[a ; b[$  ;  $]a ; b]$  ;
- intervalles particuliers :

$$\mathbb{R} = ]-\infty ; +\infty[ \text{ et } \emptyset = ]a ; a] = [a ; a[ = ]a ; a[.$$

• L'**ensemble de définition**  $D_f$  d'une fonction  $f$  est l'ensemble des éléments ayant une image par  $f$ .

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / f(x) \text{ existe}\}.$$

**Remarque :**  $D_f$  est un intervalle ou une réunion d'intervalles.

## 2. Parité d'une fonction

Soit une fonction  $f$  définie sur un ensemble  $D$  **symétrique par rapport à zéro**, c'est-à-dire que pour tout  $x$  de  $D$ ,  $-x$  appartient à  $D$ .

Parité de $f$	Définition	Élément de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$
Paire	$f(-x) = f(x)$	axe des ordonnées
Impaire	$f(-x) = -f(x)$	origine du repère

**Conséquence :** si  $f$  est paire ou impaire, alors on peut réduire l'étude de  $f$  à  $\mathbb{R}_+ \cap D$ .

## 3. Périodicité d'une fonction

Soit un réel  $T$  strictement positif et une fonction  $f$  d'ensemble de définition  $D$ .

Le nombre  $T$  est une période de  $f$  si, et seulement si pour tout réel  $x$  de  $D$ ,  $(x + T) \in D$  et  $f(x + T) = f(x)$ .

**Conséquence :** on peut réduire  $D$  à un intervalle d'étude d'amplitude  $T$  contenu dans  $D$ .

On peut représenter  $f$  sur cet intervalle, puis on obtient toute la courbe en utilisant des translations de vecteur  $kT \vec{i}$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

## Exemples d'application

- 1 Réduire l'ensemble de définition de la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \sin x \cos^2 x.$$

### Corrigé commenté

**Indication :** on commence par chercher une période pour la fonction  $f$  : pour cela on sait que les fonctions sinus et cosinus sont de période  $2\pi$ .

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x + 2\pi) = \sin(x + 2\pi) \cos^2(x + 2\pi)$$

$$f(x + 2\pi) = \sin x \cos^2 x = f(x).$$

Donc  $2\pi$  est une période de  $f$ , ce qui permet de choisir un intervalle d'amplitude  $2\pi$  pour étudier  $f$ .

**Conseil :** en cas de parité de la fonction  $f$ , il est préférable de choisir un intervalle centré en zéro donc, ici, l'intervalle  $[-\pi; \pi]$ .

$$\forall x \in [-\pi; \pi], \quad -x \in [-\pi; \pi] \text{ et } f(-x) = \sin(-x) \cos^2(-x)$$

$$\text{soit } f(-x) = -\sin x \cos^2 x = -f(x).$$

La fonction  $f$  est donc impaire.

On peut en définitive **réduire l'intervalle d'étude de  $f$  à  $[0; \pi]$ .**

**Conséquences :** si on appelle  $\Gamma_1$  la représentation de  $f$  pour  $x \in [0; \pi]$ , par symétrie de  $\Gamma_1$  par rapport à l'origine  $O$  du repère on obtient  $\Gamma_2$ . La courbe  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  est donc la représentation de  $f$  pour  $x \in [-\pi; \pi]$ .

La représentation de  $f$ , sur  $\mathbb{R}$  s'obtient par des translations de vecteurs  $(k2\pi) \vec{i}$  de  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

- 2 Soit la fonction définie par  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^3 - x}$ .

Étudier la parité de  $f$  et réduire si possible son ensemble d'étude.

### Corrigé commenté

**Indication :** il faut commencer par déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

$f(x)$  existe si et seulement si  $x^3 - x \neq 0$  soit  $(x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \text{ et } x \neq 0)$  donc :

$$D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 0[ \cup ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[.$$

On remarque que  $D_f$  est symétrique par rapport à 0, donc on peut étudier la parité de  $f$ .

$$(\forall x \in D_f) \quad (-x \in D_f) \text{ et } f(-x) = \frac{(-x)^2 + 1}{(-x)^3 - (-x)} = \frac{x^2 + 1}{-(x^3 - x)} = -f(x); \text{ donc la fonction } f \text{ est impaire.}$$

**On peut réduire l'ensemble d'étude à  $]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$ .**

## 2 Variations et opérations sur les fonctions

### 1. Variations d'une fonction sur un intervalle

Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  de son ensemble de définition.

Variations de $f$	Définitions ( $\forall x \in I$ ) ( $\forall x' \in I$ )
$f$ croissante sur $I$	$x \leq x' \Rightarrow f(x) \leq f(x')$
$f$ décroissante sur $I$	$x \leq x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')$

### 2. Extrema d'une fonction

Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  de son ensemble de définition  $D$ .

Extrema de $f$ sur $I$	Définitions ( $\forall x \in I$ )
$M$ est le <b>maximum</b> de $f$ sur $I$	$f(x) \leq M$
$m$ est le <b>minimum</b> de $f$ sur $I$	$f(x) \geq m$

**Remarques :** si  $I = D$ , alors l'extremum est absolu, sinon il est relatif ou local.  
Si  $M$  ou  $m$  existe, alors il existe un réel  $x_0$  de  $I$  tel que  $f(x_0) = M$  ou  $f(x_0) = m$ .

### 3. Opérations sur les fonctions

Opérations	Les fonctions $f$ et $g$ sont définies sur $I$	Définitions ( $\forall x \in I$ )
Addition	$f + g$	$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$
Multiplication par un réel non nul	$kf$	$(kf)(x) = kf(x)$
Multiplication	$f \times g$	$(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$
Composition	$h \circ f$	$f(x) \in J$ $(h \circ f)(x) = h[f(x)]$

#### 4. Variations et opérations sur les fonctions

- Si les fonctions  $f$  et  $g$  ont même variation, alors leur composée est croissante, sinon elle est décroissante.
- Si les fonctions  $f$  et  $g$  ont même variation sur un intervalle  $I$ , alors leur somme a même variation que chacune d'elles.
- Si les fonctions  $f$  et  $g$  ont même variation et sont strictement positives sur un intervalle  $I$ , alors leur produit a même variation que chacune d'elles.

$k \in \mathbb{R}$	$f \nearrow$ et $k > 0$	$f \searrow$ et $k > 0$	$f \searrow$ et $k > 0$	$f \searrow$ et $k < 0$
$kf$	$\nearrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\nearrow$

### Exemple d'application

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  par  $f(x) = \sin^2 x$ .

Décomposer  $f$  en fonctions usuelles pour étudier ses variations.

*Corrigé commenté*

On peut écrire  $f = f_2 \circ f_1$  avec  $\begin{cases} f_1(x) = \sin x ; x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ f_2(x) = x^2 ; x \in [-1; 1] \end{cases}$ .

$f_1$  est croissante sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$  et  $f_1 : \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1; 1]$ ;  $f_2$  est définie sur  $[-1; 1]$ .

$x$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f_1$	-1	0	1

Or sur  $[-1; 0]$ ,  $f_2$  est décroissante donc  $f_2 \circ f_1$  est décroissante sur  $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$ ; et  $f_2$  croissante sur  $[0; 1]$  donc  $f_2 \circ f_1$  est croissante sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ .

$x$	-1	0	1
$f_2$	1	0	1

## 3 Comparaisons et positions relatives de deux courbes

### 1. Majoration et minoration de fonctions

Soit une fonction  $f$  définie sur un intervalle  $I$  de son ensemble de définition.

	Définitions ( $\forall x \in I$ )
$M$ est un <b>majorant</b> de $f$	$f(x) \leq M$
$m$ est un <b>minorant</b> de $f$	$f(x) \geq m$

**Remarque :** tout extremum est majorant ou minorant d'une fonction sur un intervalle, mais la réciproque est fautive.

Autrement dit, un majorant ou un minorant n'est pas nécessairement atteint.

Une fonction  $f$  est **bornée** sur un intervalle  $I$ , si elle est à la fois majorée et minorée.

### 2. Positions relatives de deux courbes

On appelle **représentation graphique** de la fonction  $f$ , l'ensemble des points de coordonnées  $(x ; f(x))$  dans un repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  quand  $x$  décrit  $D$ .

Étudier la position relative de deux courbes représentant deux fonctions  $f$  et  $g$  revient à étudier le signe de la différence  $f(x) - g(x)$ .

Si  $f(x) - g(x) > 0$ , alors  $f(x) > g(x)$  ce qui signifie que  $\mathcal{C}_f$  est strictement au-dessus de  $\mathcal{C}_g$ .

Si  $f(x) - g(x) < 0$ , alors  $f(x) < g(x)$  ce qui signifie que  $\mathcal{C}_f$  est strictement au-dessous de  $\mathcal{C}_g$ .

Si  $f(x) = g(x)$  pour certaines valeurs de  $x$ , alors  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  ont des points communs pour chacune de ces valeurs.

### 3. Construction d'une courbe à partir de celle d'une fonction de référence

Soit  $f$  une fonction de référence définie sur un ensemble  $D$  et représentée dans un repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  orthonormé.

Fonctions définies par	Conditions d'existence	Transformations permettant de passer de $\mathcal{C}_f$ à $\mathcal{C}_g$
$g(x) = f(x) + b$	$x \in D$	Translation de vecteur $b \vec{j}$ .
$g(x) = f(x - a)$	$(x - a) \in D$	Translation de vecteur $a \vec{i}$ .
$g(x) = -f(x)$	$x \in D$	Symétrie d'axe $(O; \vec{i})$ .
$g(x) =  f(x) $	$x \in D$	Sur $D \cap \mathbb{R}_+$ , $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_f$ ; sur $D \cap \mathbb{R}_-$ , symétrie d'axe $(O; \vec{i})$ .
$g(x) = f( x )$	$ x  \in D$	$g$ est paire, donc : sur $D \cap \mathbb{R}_+$ , $\mathcal{C}_g = \mathcal{C}_f = \Gamma$ ; sur $D \cap \mathbb{R}_-$ , symétrique de $\Gamma$ par rapport à l'axe $(O; \vec{j})$ .

## Exemple d'application

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = -2x + 5 + \frac{x-1}{x^2+1}.$$

Étudier les positions relatives de la droite  $\Delta$  d'équation  $y = -2x + 5$  et de la courbe  $\mathcal{C}$  représentant  $f$ .

*Corrigé commenté*

**Indication** : étudier les positions relatives de la droite  $\Delta$  et de la courbe  $\mathcal{C}$  revient à étudier le signe de  $f(x) - (-2x + 5) = \frac{x-1}{x^2+1}$ .

Le signe de cette différence est celui de  $x - 1$  car  $x^2 + 1 > 0$ .

- Si  $x - 1 > 0$  c'est-à-dire si  $x \in ]1; +\infty[$ , alors  $f(x) - (-2x + 5) > 0$ , donc  $\mathcal{C}$  est strictement au-dessus de  $\Delta$  pour  $x \in ]1; +\infty[$ .
- Si  $x - 1 < 0$  c'est-à-dire si  $x \in ]-\infty; 1[$ , alors  $f(x) - (-2x + 5) < 0$ , donc  $\mathcal{C}$  est strictement en dessous de  $\Delta$  pour  $x \in ]-\infty; 1[$ .
- Si  $x = 1$ , alors  $\mathcal{C}$  et  $\Delta$  ont le point  $A(1; 3)$  en commun.

## 4 Symétries de la courbe représentative d'une fonction

### 1. Centre de symétrie d'une courbe

Soit  $\Omega(a; b)$  un point situé dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On veut prouver que  $\Omega$  est centre de symétrie de la courbe représentative d'une fonction  $f$  dont l'ensemble de définition est  $D_f$ .

#### ● Première méthode

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet D_f \text{ est symétrique par rapport à } a \\ \bullet h \in \mathbb{R}, (a+h) \in D_f, (a-h) \in D_f \\ \bullet \frac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b \end{array} \right.$$

Alors  $\Omega$  est le centre de symétrie de  $\mathcal{C}$ .

#### ● Deuxième méthode

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet M(x, y) \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}) \text{ et } M(X; Y) \text{ dans } (\Omega; \vec{i}, \vec{j}) \\ \bullet \begin{cases} x = a + X \\ y = a + Y \end{cases} \\ \bullet \mathcal{C} \text{ a pour équation } y = f(x) \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}) \\ \text{ et } \mathcal{C} \text{ a pour équation } Y = g(X) \text{ dans } (\Omega; \vec{i}, \vec{j}) \end{array} \right.$$

Si  $g$  est impaire, alors  $\Omega$  est le centre de symétrie de  $\mathcal{C}$ .

### 2. Axe de symétrie d'une courbe

Soit la droite  $\Delta$  d'équation  $x = a$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ . On veut prouver que  $\Delta$  est l'axe de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}$  représentative d'une fonction  $f$  dont l'ensemble de définition est  $D_f$ .

#### ● Première méthode

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet D_f \text{ est symétrique par rapport à } a \\ \bullet h \in \mathbb{R}, (a+h) \in D_f, (a-h) \in D_f \\ \bullet f(a+h) = f(a-h) \end{array} \right.$$

Alors  $\Delta$  est axe de symétrie de  $\mathcal{C}$ .

## ● Deuxième méthode

$$\left. \begin{array}{l} \bullet M(x, y) \text{ dans } (O ; \vec{i}, \vec{j}) \text{ et } M(X ; Y) \text{ dans } (\Omega ; \vec{i}, \vec{j}) \\ \text{avec par exemple } \Omega(a ; 0) \\ \bullet \begin{cases} x = a + X \\ y = Y \end{cases} \\ \bullet \mathcal{C} \text{ a pour équation } y = f(x) \text{ dans } (O ; \vec{i}, \vec{j}) \\ \text{et } \mathcal{C} \text{ a pour équation } Y = g(X) \text{ dans } (\Omega ; \vec{i}, \vec{j}) \end{array} \right\}$$

Si  $g$  est paire, alors  $\Delta$  est axe de symétrie de  $\mathcal{C}$ .

## Exemple d'application

Montrer que la droite d'équation  $x = -2$  est axe de symétrie de la courbe  $\mathcal{C}$  représentant la fonction  $f$ , définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 4x + 6}$ .

### Corrigé commenté

**Indication** : soit  $\Omega(-2 ; 0)$  l'origine du repère  $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère le point  $M(x ; y)$  dans  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$  et  $M(X ; Y)$  dans  $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$ .

Les formules de changement de repère sont :

$$\begin{cases} x = -2 + X \\ y = Y. \end{cases}$$

La courbe  $\mathcal{C}$  a pour équation  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 + 4x + 6} = y$  dans  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ , elle a pour équation dans  $(\Omega ; \vec{i}, \vec{j})$  :  $Y = \frac{(-2 + X)^2 + 4(-2 + X) + 3}{(-2 + X)^2 + 4(-2 + X) + 6}$ ,

$$\text{soit } Y = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 2}.$$







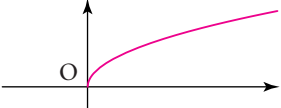



$$Y = g(X) = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 2}, \text{ } g \text{ est définie sur } \mathbb{R} \text{ car } X^2 + 2 > 0.$$

$$\text{Pour tout réel } X, -X \in \mathbb{R} \text{ et } g(-X) = \frac{(-X)^2 - 1}{(-X)^2 + 2};$$

$$\text{soit } g(-X) = \frac{X^2 - 1}{X^2 + 2} = g(X).$$

La fonction  $g$  est paire, donc la courbe  $\mathcal{C}$  est symétrique par rapport à l'axe  $(\Omega ; \vec{j})$ ; c'est-à-dire que la droite  $\Delta$  d'équation  $x = -2$  est axe de symétrie de  $\mathcal{C}$ , dans le repère  $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ .

# 5 Fonctions usuelles

Fonctions	Noms et variations	Courbes représentatives
$x \mapsto ax + b$ $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ $x \in \mathbb{R}$	fonction affine	
		sur $\mathbb{R}$
	$a > 0$	
	$a < 0$	
$x \mapsto ax^2$ $x \in \mathbb{R}$ $a \in \mathbb{R}^*$	fonction carrée	
		sur $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_-$
	$a > 0$	
	$a < 0$	
$x \mapsto ax^3$ $a \in \mathbb{R}^*$ $x \in \mathbb{R}$	fonction cube	
		sur $\mathbb{R}$
	$a > 0$	
	$a < 0$	
$x \mapsto \sqrt{x}$ $x \in \mathbb{R}_+$	fonction racine carrée strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$	
		
$x \mapsto \frac{a}{x}$	fonction inverse	
		sur $\mathbb{R}_-^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$
	$a > 0$	
	$a < 0$	
$x \mapsto  x $ $x \in \mathbb{R}$	fonction valeur absolue	
	sur $\mathbb{R}_-$	sur $\mathbb{R}_+$
		
$x \mapsto \ln x$ $x \in \mathbb{R}_+^*$	voir page 148	
$x \mapsto \exp x$ $x \in \mathbb{R}$	voir page 184	

Fonctions	Noms et variations	Courbes représentatives
$x \mapsto \cos x$ $x \in \mathbb{R}$	fonction cosinus de période $2\pi$ , paire sur $[-\pi; \pi]$ , décroissante sur $[0; \pi]$	
$x \mapsto \sin x$ $x \in \mathbb{R}$	fonction sinus de période $2\pi$ , impaire sur $[-\pi; \pi]$ , croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$	

## Exemple d'application

Donner, pour chaque proposition une justification, qui soit relative à la variation d'une fonction usuelle.

- Si  $a < b \leq 0$ , alors  $a^2 > b^2 \geq 0$ .
- Si  $a < b$ , alors  $a^3 < b^3$ .
- Si  $a < b < 0$ , alors  $\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 0$ .
- Si  $0 \leq a < b$ , alors  $0 \leq \sqrt{a} < \sqrt{b}$ .
- Si  $0 < a < b$ , alors  $\ln a < \ln b$ .
- Si  $a < b$ , alors  $e^a < e^b$ .
- Si  $a < b$ , alors  $-2a + 3 > -2b + 3$ .

### Corrigé commenté

- La fonction carrée est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_-$ .
- La fonction cube est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction inverse est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_-^*$ .
- La fonction racine carrée est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur  $\mathbb{R}_+^*$ .
- La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction affine  $x \mapsto -2x + 3$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .