1 Définition et approche géométrique

1. Définition

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$.

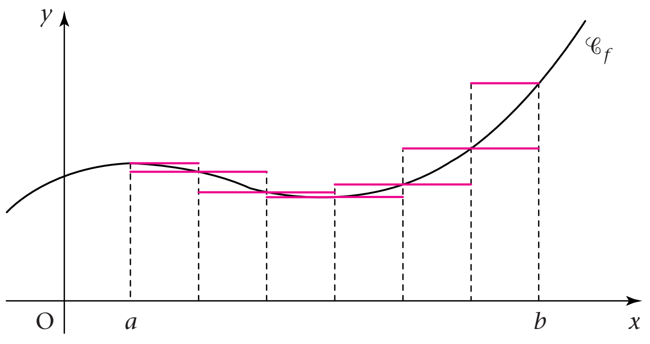
On considère le domaine délimité par la courbe représentant f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

L'aire de ce domaine, en unités d'aire, est le nombre réel noté $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ et appelé **intégrale de a à b de la fonction f.**

2. Approche géométrique

La fonction f peut être encadrée par deux fonctions en escalier, l'une majorant f et l'autre la minorant.

L'aire du domaine sous la courbe est donc encadrée par deux suites adjacentes d'aires de rectangles associés à une subdivision de $[a, b]$. Si on subdivise de plus en plus finement, ces deux suites convergent vers un même nombre, ce nombre est **l'aire sous la courbe** $\mathscr{C}_f$.



3. Généralisation

Si f est continue et négative sur un intervalle $[a, b]$, l'opposée de cette fonction est positive et on peut revenir à la définition précédente.

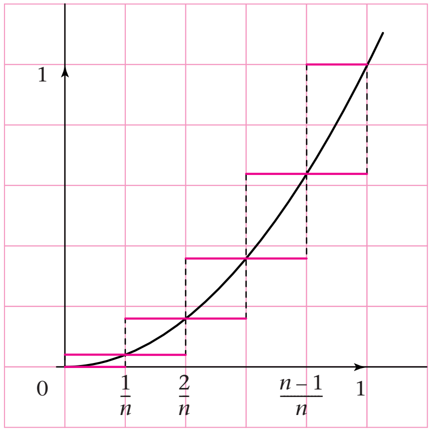
Si $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant 0$ et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente une aire.

Si $f \leqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0$ et $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ représente l'opposé d'une aire.

Exemple d'application

On considère la fonction $f : x \mapsto x^2$ sur $[0\ ;\ 1]$.
On subdivise l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ en segments d'amplitude $\frac{1}{n}\cdot$ Calculer $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ en utilisant la définition.

Corrigé commenté



Sur $\left[0\ ;\ \frac{1}{n}\right]$, l'aire sous la courbe est encadrée par celle d'un rectangle d'aire nulle associée à $x \mapsto 0$ et par celle d'un rectangle d'aire égale à $\frac{1}{n} \times \left(\frac{1}{n}\right)^2$ associé à $x \mapsto \left(\frac{1}{n}\right)^2$.
Et ainsi de suite jusqu'au dernier intervalle $\left[\frac{n-1}{n}\ ;\ 1\right]$, où l'aire sous la courbe est encadrée par l'aire du rectangle de largeur $\frac{1}{n}$ et de longueur $\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$ associée à $x \mapsto \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$ et l'aire du rectangle de largeur $\frac{1}{n}$ et de longueur 1 associée à $x \mapsto 1$.
Donc l'aire sous la courbe représentant f sur $[0\ ;\ 1]$ est telle que :

$$0 + \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{n} + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n^2} \times \frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2 \times \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} \times 1$$

soit $\frac{1}{n^3}[1 + 2^2 + \dots + (n-1)^2] \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n^3}(1 + 2^2 + \dots + n^2)$.

Indication : *On rappelle que la somme des carrés des n premiers nombres entiers naturels est* $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Donc $\frac{1}{6n^3}(n-1)(n)(2n-1) \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{6n^3} n(n+1)(2n+1)$,

soit $\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2} \leqslant \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$;

or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}$,

d'où $\boxed{\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\cdot}$

2 Propriétés des intégrales

1. Propriétés

Soit f et g deux fonctions définies et continues sur $[a, b]$.

- $\int_a^a f(x)\,dx = 0$; $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.
- Relation de Chasles : $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.
- Linéarité de l'intégrale : $(\forall\alpha \in \mathbb{R})$ $(\forall\beta \in \mathbb{R})$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx + \beta\int_a^b g(x)\,dx.$$

- Si f est paire, alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
- Si f est impaire, alors $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.
- Si f est périodique de période T, alors $\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx$.

2. Intégrales et inégalités

Soit f et g deux fonctions définies et continues sur $[a, b]$.

- Si pour tout réel $x \in [a, b]$, on a $f(x) \geqslant 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Conséquence : Si pour tout x de $[a, b]$ on a $f(x) \leqslant g(x)$,

alors $\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$.

- Inégalité de la moyenne

La fonction f étant continue sur $[a, b]$ il existe deux réels m et M tels que, pour tout réel $x \in [a, b]$, on ait $m \leqslant f(x) \leqslant M$ et alors :

$$\boxed{m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a)}$$

3. Théorème de la moyenne

Pour toute fonction f définie et continue sur l'intervalle $[a, b]$, il existe au moins un réel c de $[a, b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Le réel $f(c)$ est appelé **valeur moyenne de f sur $[a, b]$**.

4. Interprétations géométriques

Soit f une fonction continue et positive représentée dans un repère orthogonal.

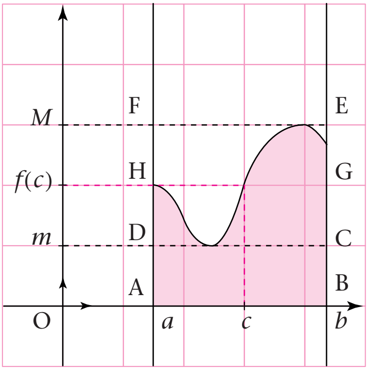
• L'encadrement

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$$

signifie que l'aire du domaine coloré est minorée par l'aire du rectangle ABCD, et majorée par celle du rectangle ABEF.

• L'égalité $f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

signifie que l'aire du domaine coloré est égale à celle du rectangle ABGH.



Exemple d'application

Soit la fonction f définie sur $\left[0\,;\,\frac{2}{3}\right]$ par $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

Montrer que f est bornée sur $\left[0\,;\,\frac{2}{3}\right]$, en déduire un encadrement de :

$$\int_0^{\frac{2}{3}} (3x^2 - 2x + 1)\,\mathrm{d}x.$$

Corrigé commenté

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc $f'(x) = 6x - 2$.

Pour $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{3}$, $6x - 2 \leqslant 0$ donc f est décroissante et par suite :

$f\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant f(x) \leqslant f(0)$ soit $\frac{2}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

Pour $\frac{1}{3} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$, $6x - 2 \geqslant 0$ donc f est croissante et par suite :

$f\left(\frac{1}{3}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\frac{2}{3}\right)$ soit $\frac{2}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$. Donc $\forall x \in \left[0\,;\,\frac{2}{3}\right]$, $\frac{2}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

D'après le théorème de l'inégalité de la moyenne on a alors :

$\frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} - 0\right) \leqslant \displaystyle\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 1\left(\frac{2}{3} - 0\right)$ d'où :

$$\boxed{\frac{4}{9} \leqslant \int_0^{\frac{2}{3}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{3}}$$

3 Intégration et dérivation

1. Notion de primitive

Soit une fonction f définie et continue sur un intervalle I et a un réel de I, la fonction F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

2. Définition d'une intégrale à l'aide de primitives

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$, F une primitive quelconque de f.
Le nombre réel $F(b) - F(a)$ est indépendant de la primitive F choisie, on l'appelle **intégrale de f sur $[a, b]$.**

On note $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = \left[F(x)\right]_a^b$.

Remarque : *La lettre choisie pour la variable est une variable muette ce qui signifie que :* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = F(b) - F(a)$.

3. Intégration par parties

Si u et v sont deux fonctions définies et deux fois dérivables sur $[a, b]$:

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x.$$

Exemples d'application

1 Calculer $\int_1^4 \ln x\,\mathrm{d}x$.

Corrigé commenté

On ne connaît pas de primitive de la fonction logarithme, on utilise une intégration par parties en posant $\begin{cases} f(x) = \ln x \\ g'(x) = 1 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{x} \\ g(x) = x. \end{cases}$

Les fonctions f, g sont dérivables et f' et g' sont continues sur $[1\,;\,4]$ donc :

$$\int_1^4 \ln x\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x\Big]_1^4 - \int_1^4 \frac{1}{x}\times x\,\mathrm{d}x$$

$$\int_1^4 \ln x\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x\Big]_1^4 - \int_1^4 \mathrm{d}x = \Big[x\ln x - x\Big]_1^4.$$

Remarque : $\int_1^4 \ln x\,\mathrm{d}x = \Big[x\ln x - x\Big]_1^4$ *traduit le fait que* $x \mapsto x\ln x - x$ *est une primitive de* $x \mapsto \ln x$.

$\int_1^4 \ln x\,\mathrm{d}x = 4\ln 4 - 4 - \ln 1 + 1$ d'où $\boxed{\int_1^4 \ln x\,\mathrm{d}x = 4\ln 4 - 3.}$

2 Calculer le réel I tel que $I = \int_0^3 |x-2|\,\mathrm{d}x$.

Corrigé commenté

On commence par écrire $|x-2|$ *sans barre de valeur absolue sur* $[0\,;\,3]$.

Sur $[0\,;\,2]$, $|x-2| = -x+2$;

Sur $[2\,;\,3]$, $|x-2| = x-2$.

Donc $I = \int_0^2 (2-x)\,\mathrm{d}x + \int_2^3 (x-2)\,\mathrm{d}x$

soit :

$I = \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_0^2 + \left[\frac{x^2}{2} - 2x\right]_2^3 = 4 - 2 + \frac{9}{2} - 6 - 2 + 4$ d'où $\boxed{I = \frac{5}{2}.}$

3 Écrire à l'aide d'une intégrale, $\ln x$ pour x réel strictement positif.
Retrouver grâce à cette écriture qui est aussi la définition de la fonction ln, les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.

Corrigé commenté

La fonction ln est la primitive sur $]0\,;\,+\infty[$ de la fonction inverse qui s'annule en 1, donc :

$$\ln x = \int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

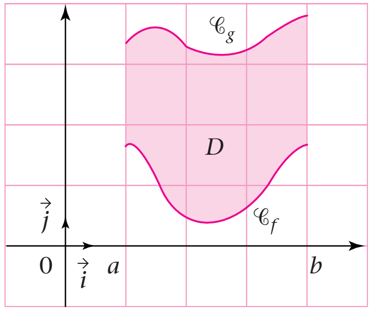
Par définition d'une primitive d'une fonction, $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Or sur $]0\,;\,+\infty[$, $\frac{1}{x} > 0$ donc **la fonction ln est strictement croissante sur** $]0\,;\,+\infty[$.

4 Calculs d'aires et de volumes

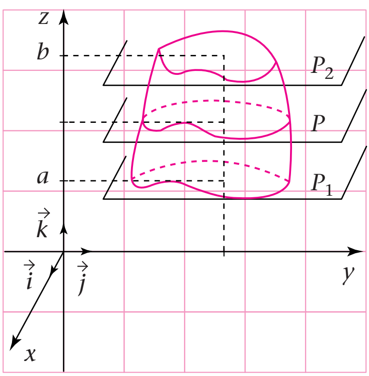
1. Calcul d'aire

Soit f et g deux fonctions continues sur le segment $[a, b]$, telles que pour tout x de $[a, b]$, on ait $f(x) \leqslant g(x)$. L'aire du domaine D coloré, délimité par les courbes $\mathscr{C}_f$, $\mathscr{C}_g$ et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$, est égale au réel $\mathscr{A}$ tel que $\mathscr{A} = \int_a^b [g(x) - f(x)]\,\mathrm{d}x$. Ce réel est exprimé en unités d'aire noté u.a.



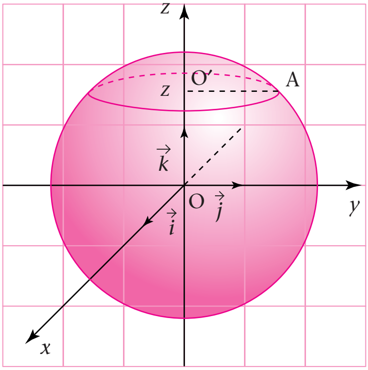
2. Calcul de volume

L'espace est rapporté à un repère orthogonal $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit V le volume d'un solide délimité par une surface latérale Σ et deux plans P_1 et P_2 parallèles à $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et de cotes respectives a et b.
Soit le plan P parallèle à P_1 et P_2 de cote z.
Le plan P coupe le solide selon une surface S dont l'aire $\mathscr{S}(z)$ est telle que $z \mapsto \mathscr{S}(z)$ soit continue sur $[a, b]$ et alors $V = \int_a^b \mathscr{S}(z)\,\mathrm{d}z$.
Le volume V est exprimé en unités de volume noté u.v.



Exemples d'application

1 Calculer le volume V de la boule de centre O et de rayon R, en cm^3, dans un repère orthonormé $(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unités graphiques 1 cm.



La section de la boule par le plan P de cote z $(-R \leqslant z \leqslant R)$ est un disque de rayon O'A.
Le triangle OO'A est rectangle en O' donc $\text{O'A}^2 = \text{OA}^2 - \text{O'O}^2 = R^2 - z^2$.
Soit $\mathcal{S}(z)$ l'aire de ce disque.
$\mathcal{S}(z) = (R^2 - z^2)\pi$ donc, en centimètres cubes :

$$V = \pi\int_{-R}^{R}(R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z = \pi R^2\int_{-R}^{R}\mathrm{d}z - \pi\int_{-R}^{R}z^2\,\mathrm{d}z$$

$$V = \pi R^2\Big[z\Big]_{-R}^{R} - \pi\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \pi R^2(2R) - \pi\left(\frac{2R^3}{3}\right)$$

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi R^3\ \text{cm}^3.}$$

2 Soit $\mathscr{C}$ la représentation graphique de $x \mapsto \mathrm{e}^x$ dans un repère $(\text{O} ; \vec{i}, \vec{j})$.
Sur $[0 ; +\infty[$, la courbe $\mathscr{C}$ subit une révolution d'axe (Ox).
Quel est le volume du solide déterminé par les plans d'équations $x = 0$, $x = 1$ et engendré par la courbe $\mathscr{C}$?

Corrigé commenté

La section du solide par un plan perpendiculaire à (Ox) est un disque dont l'aire $S(x)$ est telle que $S(x) = \pi(\mathrm{e}^x)^2$ soit $S(x) = \pi\mathrm{e}^{2x}$.
La fonction S est continue sur $[0 ; 1]$, donc le volume V en u.v du solide est tel que :

$$V = \int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = \pi\int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x = \pi\left[\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2 - 1),$$

d'où $$\boxed{V = \frac{\pi}{2}(\mathrm{e}^2 - 1)}$$