1 Limite d'une fonction à l'infini

1. Limite finie d'une fonction à l'infini

Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a\,;+\infty[$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

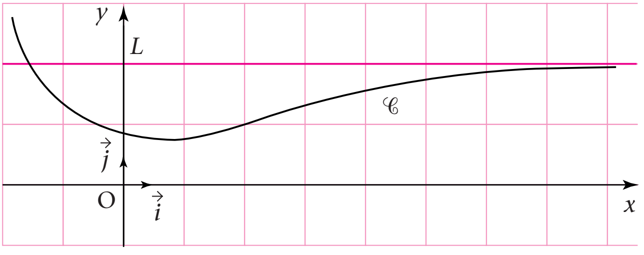
> La fonction f tend vers L quand x tend vers $+\infty$, si tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x assez grand.

On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = L$.

On définit de même la limite en $-\infty$ d'une fonction f définie sur un intervalle $]-\infty\,; b]$.

● **Interprétation géométrique**

Si $\lim\limits_{+\infty} f = L$, alors la droite d'équation $y = L$ est asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ dans un voisinage de l'infini.



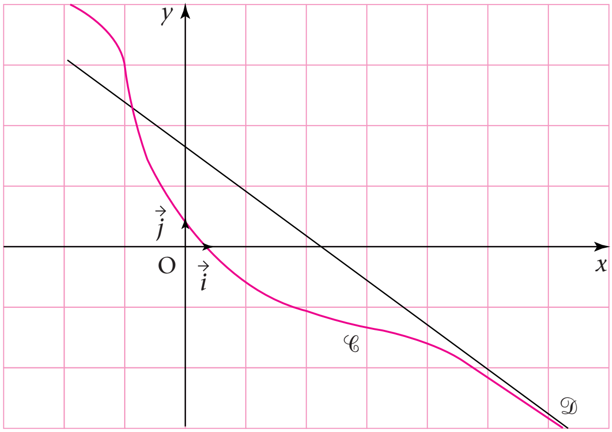
2. Limite infinie d'une fonction à l'infini

> Une fonction f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$, si pour tout réel $A > 0$, on a $f(x) > A$ pour x assez grand.

On définit de même la limite en $-\infty$.

● **Interprétation géométrique**

Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ et si f peut s'écrire sous la forme $f(x) = ax + b + h(x)$ avec $\lim\limits_{+\infty} h = 0$, alors la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à $\mathscr{C}$ dans un voisinage de $+\infty$.



Exemple d'application

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2 ; 2\}$ par $f(x) = x - 4 + \dfrac{4x - 9}{x^2 - 4}$.

Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x - 4$ est asymptote à la représentation graphique de f.

Corrigé commenté

$f(x)$ s'écrit sous la forme $f(x) = x - 4 + h(x)$ avec $h(x) = \dfrac{4x - 9}{x^2 - 4}$.

Montrons que $\lim\limits_{|x| \to \infty} h(x) = 0$.

$$h(x) = \frac{x\left(4 - \dfrac{9}{x}\right)}{x\left(x - \dfrac{4}{x}\right)} = \frac{4 - \dfrac{9}{x}}{x - \dfrac{4}{x}} \text{ car } x \neq 0.$$

$\lim\limits_{|x| \to \infty} -\dfrac{4}{x} = \lim\limits_{|x| \to \infty} -\dfrac{9}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{|x| \to \infty} \left(4 - \dfrac{9}{x}\right) = 4$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(x - \dfrac{4}{x}\right) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0$.

De même $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x - \dfrac{4}{x}\right) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = 0$.

Donc la droite d'équation $y = x - 4$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ dans un voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

2 Limite d'une fonction en *a*

1. Limite finie d'une fonction en *a*

Soit un réel a.

> Une fonction f admet une limite L en a si, tout intervalle ouvert contenant L, contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$ ou bien $\lim\limits_{a} f = L$.

2. Limite infinie d'une fonction en *a*

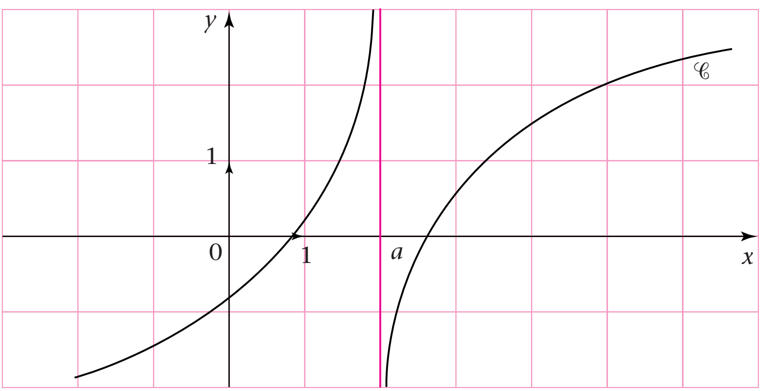
Soit un réel a.

> Une fonction f admet pour limite $+\infty$ en a si, quel que soit un réel $A > 0$, tout intervalle $[A\ ;\ +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour x suffisamment proche de a.

On note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$ ou bien $\lim\limits_{a} f = +\infty$.
On définit de même $\lim\limits_{a} f = -\infty$.

3. Interprétation géométrique

Si $\lim\limits_{a} f = \infty$, alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la représentation graphique $\mathscr{C}$ de f.



Exemples d'application

1 Soit la fonction f définie dans $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2}$.

Montrer que $\lim\limits_{1} f = +\infty$ en utilisant les définitions précédentes.

Corrigé commenté

Soit un réel A strictement positif et quelconque.

> ***Indication :** on cherche un nombre $h > 0$ tel que, pour $1 - h < x < 1 + h$ on ait $f(x) > A$.*

Pour que $f(x) > A$, il suffit que $\dfrac{1}{(x-1)^2} > A$,

soit $(x-1)^2 < \dfrac{1}{A}$ car $(x-1)^2 > 0$. Donc $|x-1| < \dfrac{1}{\sqrt{a}}$.

On peut prendre h tel que $h = \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ et alors pour $1 - \dfrac{1}{\sqrt{A}} < x < 1 + \dfrac{1}{\sqrt{A}}$ on a $f(x) > A$. Cela signifie que $\boxed{\lim\limits_{x \to 1} f(x) = +\infty.}$

2 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\ ;\ 1\}$ par $f(x) = \dfrac{3x^3 - 4x + 1}{x^2 - 1}$.

Déterminer, si elles existent, les limites en -1 et en 1 de la fonction f.

Corrigé commenté

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ < -1}} (x^2 - 1) = 0^+ \\ \lim\limits_{x \to -1} (3x^3 - 4x + 1) = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ > -1}} (x^2 - 1) = 0^- \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{donc par quotient } \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ < -1}} f(x) = +\infty \\ \text{et } \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ > -1}} f(x) = -\infty. \end{array}$$

La fonction f n'a pas de limite en -1, mais elle a une limite à gauche de -1 égale à $+\infty$ et une limite à droite de -1 égale à $-\infty$.

• Pour la valeur 1, le numérateur et le dénominateur s'annulent, donc 1 est racine de chacun des polynômes.

D'où, $3x^3 - 4x + 1 = (x-1)(3x^2 + 3x - 1)$ et $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Après simplification, on obtient $f(x) = \dfrac{3x^2 + 3x - 1}{x + 1}$ car $x \neq 1$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1} (3x^2 + 3x - 1) = 5 \\ \lim\limits_{x \to 1} (x + 1) = 2 \end{array}\right\} \text{donc } \lim\limits_{x \to 1} f(x) = \frac{5}{2}.$$

La fonction f a une limite en 1 égale à $\dfrac{5}{2}$.

3 Continuité d'une fonction

1. Définitions

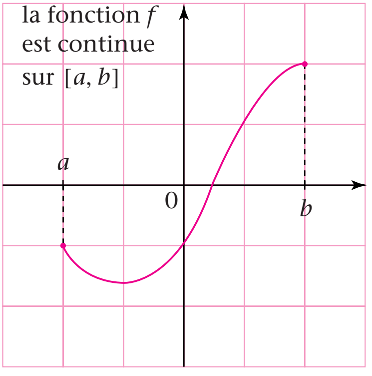
● Soit une fonction f définie sur un intervalle I contenant un réel a.

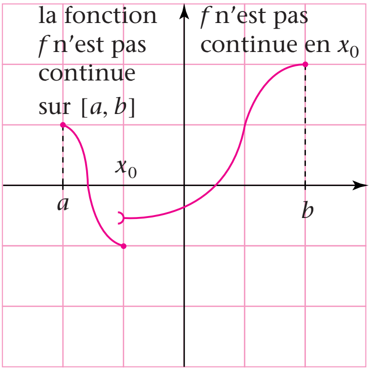
La fonction f est continue en a si f admet une limite finie en a égale à $f(a)$.

f est continue en a si et seulement si :

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$ ou bien $\lim\limits_{h \to 0} f(a+h) = f(a)$.

La fonction f est continue sur un intervalle I si f est continue en tout point de I. Graphiquement cela se traduit par la possibilité de tracer une courbe sans lever le crayon de la feuille.





2. Propriétés

● Toutes les fonctions construites comme somme, produit, quotient ou composées de fonctions polynômes, trigonométriques, logarithmes ou exponentielles sont continues.

● Si f est une fonction dérivable sur un intervalle, alors elle est continue sur cet intervalle.

Remarque : *si f est définie sur $[a, b]$, si f est dérivable sur $]a, b]$ et si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, alors f est continue sur $[a, b]$.*

Exemple d'application

Étudier et représenter graphiquement la fonction partie entière de x sur $[-2\ ;\ 3]$ notée $E : x \mapsto E(x)$.

Corrigé commenté

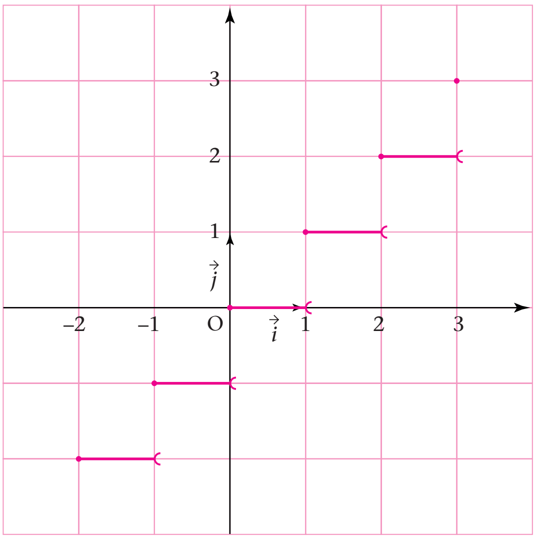
Conseil : *la partie entière d'un nombre est le plus grand entier inférieur à ce nombre.*

$E(3{,}7) = 3$; $E(2) = 2$; $E(-3{,}7) = -4$.

Pour tout $x \in [n\ ;\ n+1[$ avec $n \in \mathbb{Z}$, $E(x) = n$.

Donc sur $[-2\ ;\ 3]$,
$\forall x \in [-2\ ;\ -1[$; $E(x) = -2$
$\forall x \in [-1\ ;\ 0[$; $E(x) = -1$
$\forall x \in [0\ ;\ 1[$; $E(x) = 0$
$\forall x \in [1\ ;\ 2[$; $E(x) = 1$
$\forall x \in [2\ ;\ 3[$; $E(x) = 2$
$E(3) = 3$.

La fonction partie entière est donc une fonction constante par intervalle, discontinue pour chaque valeur entière de x donc discontinue sur $[-2\ ;\ 3]$.



Remarque : *la discontinuité de la fonction partie entière est traduite par le fait qu'en la représentant, le crayon quitte le papier pour chaque valeur entière. La courbe n'est pas tracée d'un seul trait.*

4 Opérations sur les limites

1. Limite de la somme de deux fonctions ou de deux suites

Les nombres ℓ et ℓ' sont des réels.

Limite de f	ℓ	ℓ	∞	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de g	ℓ'	∞	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de $f+g$	$\ell+\ell'$	∞	∞	$+\infty$	$-\infty$		

Il y a une indétermination mise en évidence par la case bleue.

2. Limite du produit d'une fonction par un réel α non nul

Les nombres ℓ et α sont des réels.

Limite de f		ℓ	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha > 0$	Limite de αf	$\alpha\ell$	$+\infty$	$-\infty$
$\alpha < 0$	Limite de αf	$\alpha\ell$	$-\infty$	$+\infty$

3. Limite du produit de deux fonctions ou de deux suites

Les nombres ℓ et ℓ' sont des réels.

Limite de f	ℓ	$\ell>0$	$\ell<0$	$\ell>0$	$\ell<0$	$+\infty$	$+\infty$	0
Limite de g	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	∞
Limite de fg	$\ell\ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	

4. Limite du quotient de deux fonctions ou de deux suites

Les nombres ℓ et ℓ' sont des réels.

Limite de f	ℓ	$\ell\neq 0$	0	ℓ	∞	$+\infty$	$-\infty$	0
Limite de g	$\ell'\neq 0$	0	$\ell'\neq 0$	∞	0	$-\infty$	$+\infty$	0
Limite de $\frac{f}{g}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	∞	0	0	∞			

Il y a deux cas d'indétermination si le numérateur et le dénominateur ont une limite infinie, ou bien s'ils ont tous les deux une limite nulle.

5. Limite de la composée de deux fonctions

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ et si $\lim\limits_{y \to b} g(y) = c$, alors $\lim\limits_{x \to a} (g \circ f)(x) = c$.

Exemple d'application

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\ ;\ -2\}$ par :

$$f(x) = \frac{-2x^3 + 5x - 3}{-x^2 - x + 2}.$$

Déterminer la limite de f en 1.

Corrigé commenté

Conseil : *le numérateur et le dénominateur s'annulent pour $x = 1$. Cela signifie que 1 est racine des polynômes $-2x^3 + 5x - 3$ et $-x^2 - x + 2$, donc chacun d'eux est factorisable par $(x - 1)$.*

La division euclidienne de $-2x^3 + 5x - 3$ par $x - 1$ s'écrit :

$$\begin{array}{r|l} -2x^3 + 5x - 3 & x - 1 \\ \cline{2-2} -(-2x^3 + 2x^2) & -2x^2 - 2x + 3 \\ \cline{1-1} -2x^2 + 5x - 3 & \\ -(-2x^2 + 2x) & \\ \cline{1-1} 3x - 3 & \\ -(3x - 3) & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

d'où $-2x^3 + 5x - 3 = (x - 1)(-2x^2 - 2x + 3)$,

de même $-x^2 - x + 2 = (x - 1)(-x - 2)$, or $x \neq 1$ d'où $f(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x + 3}{-x - 2}$.

$\lim\limits_{x \to 1} (-2x^2 - 2x + 3) = -1$ et $\lim\limits_{x \to 1} (-x - 2) = -3$ donc

$$\boxed{\lim_{x \to 1} f(x) = \frac{1}{3}.}$$

5 Théorème des valeurs intermédiaires

1. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit une fonction f, définie et continue sur un intervalle I et deux réels a et b de I. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b, tel que $f(c) = k$.

Autre énoncé : si la fonction f est définie et continue sur un intervalle I, l'image de l'intervalle I par f est un intervalle.

2. Corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

Si une fonction f est continue et strictement monotone sur $[a, b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[a, b]$.

Remarque : *on peut étendre ce corollaire à une fonction définie sur un intervalle* $[a, b[$, $]a, b]$ *ou* $]a, b[$. *On déterminera alors les intervalles images en calculant les limites aux bornes des intervalles.*

3. Intervalles images

On note J l'intervalle image par f de I.

I	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
$[a, b]$	$J = [f(a), f(b)]$	$J = [f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$J = [f(a), \lim\limits_{b} f[$	$J =]\lim\limits_{b} f, f(a)]$
$]a, b]$	$J =]\lim\limits_{a} f, f(b)]$	$J = [f(b), \lim\limits_{a} f[$
$]a, b[$	$J =]\lim\limits_{a} f, \lim\limits_{b} f[$	$J =]\lim\limits_{b} f, \lim\limits_{a} f[$

Exemples d'application

1 Soit la fonction f définie sur $]-1\ ;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2x}{x+1}$.

Déterminer l'image J par f de l'ensemble $]-1\ ;+\infty[$.

Corrigé commenté

***Indication :** pour étudier les variations de f et ses limites aux bornes de son ensemble de définition on peut écrire f sous la forme* $f(x) = 2 - \dfrac{2}{x+1}$.

$\forall x \in]-1\ ;+\infty[,\ f'(x) = \dfrac{2}{(x+1)^2}$.

$(x+1)^2 > 0$ donc $f'(x) > 0$.

Donc sur $]-1\ ;+\infty[$, la fonction f est strictement croissante.

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ > -1}} (x+1) = 0^+$ et $\lim\limits_{\substack{X \to 0 \\ > 0}} \dfrac{-2}{X} = -\infty$, donc par composition et par addition :

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ > -1}} f(x) = -\infty.$$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} -\dfrac{2}{X} = 0$, donc par composition et par addition :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2.$$

L'ensemble J image de I par f est tel que f étant strictement croissante et continue sur $]-1\ ;+\infty[$ on ait $J = \left]\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ > -1}} f(x)\ ;\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)\right[$ soit $\boxed{J =]-\infty\ ;2[.}$

2 Déterminer le nombre de solutions de l'équation $x^3 - 4x^2 + 7x - 1 = 0$.

Corrigé commenté

***Conseil :** avant de faire tout calcul, il faut voir s'il y a des racines évidentes, si l'expression est factorisable et si enfin on reconnait une identité remarquable.*

Cet inventaire étant négatif, on appelle f la fonction telle que :

$f(x) = x^3 - 4x^2 + 7x - 1$.

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 7$. $\quad \Delta = 64 - 84 = -20$ donc $\Delta < 0$, par suite $f'(x) > 0$ (signe du coefficient 3 de x^2).

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$(x^3 - 4x^2 + 7x - 1) = x^3\left(1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{7}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right)$ car $x \neq 0$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{|x| \to +\infty} \left(1 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{7}{x^2} - \dfrac{1}{x^3}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \text{donc par produit} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty, \end{array}$$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

La fonction f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$, et zéro appartient à $\mathbb{R}$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

6 Théorèmes de comparaison

Les résultats ci-dessous restent valables si les fonctions sont des suites.

Si on connaît le comportement de certaines fonctions, on peut en déduire par comparaison le comportement d'autres fonctions.
Dans le tableau ci-dessous, la notation a représente aussi bien un réel que l'infini.

Relations liant les fonctions dans un voisinage de a	Comportement de $g(x)$ et de $h(x)$	Comportement de $f(x)$
$f(x) \leqslant g(x)$	$\lim_a g = -\infty$	$\lim_a f = -\infty$
$f(x) \geqslant g(x)$	$\lim_a g = +\infty$	$\lim_a f = +\infty$
$\lvert f(x) - \ell \rvert \leqslant g(x)$ ℓ est un réel	$\lim_a g = 0$	$\lim_a f = \ell$
$f(x) \leqslant g(x)$	$\lim_a f = \ell$ et $\lim_a g = \ell'$	$\lim_a f \leqslant \lim_a g$ $\ell \leqslant \ell'$
$h(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$	$\lim_a h = \lim_a g = \ell$ ℓ est un réel	Théorème des gendarmes $\lim_a f = \ell$

Exemples d'application

1 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1 + \dfrac{\sin x}{x}$.
Déterminer la limite de f en $+\infty$.

Corrigé commenté

Conseil : *la fonction sinus n'a pas de limite en $+\infty$, et pourtant la fonction f en a une.*

En effet : $f(x) - 1 = \dfrac{\sin x}{x}$ d'où $|f(x) - 1| = \dfrac{|\sin x|}{|x|}$.

Or $|\sin x| \leqslant 1$ donc $|f(x) - 1| \leqslant \dfrac{1}{|x|}$.

Par ailleurs $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{|x|} = 0$, donc par comparaison $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1.}$

2 Montrer que pour tout réel strictement positif :

$$\frac{x-1}{x+1} \leqslant \frac{x-\sin x}{x+1} \leqslant 1.$$

En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \dfrac{x-\sin x}{x+1}$.

Corrigé commenté

Soit $\alpha = \dfrac{x-\sin x}{x+1} - 1 = \dfrac{x-\sin x - x - 1}{x+1} = \dfrac{-\sin x - 1}{x+1}$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $x+1 > 0$ et $-2 \leqslant -\sin x - 1 \leqslant 0$ donc $\alpha \leqslant 0$ soit $\dfrac{x-\sin x}{x+1} \leqslant 1$.

Soit $\beta = \dfrac{x-\sin x}{x+1} - \dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{-\sin x + 1}{x+1}$.

Or, $0 \leqslant -\sin x + 1 \leqslant 2$ et $x+1 > 0$ d'où $\beta \geqslant 0$ soit $0 \leqslant \dfrac{x-\sin x}{x+1} - \dfrac{x-1}{x+1}$

donc $\dfrac{x-1}{x+1} \leqslant \dfrac{x-\sin x}{x+1} \leqslant 1$.

Or $\dfrac{x-1}{x+1} = \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}$ car $x \neq 0$, d'où $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 1$.

D'après le théorème des gendarmes, on déduit que $\boxed{\lim\limits_{+\infty} f = 1.}$

3 Soit la suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{\sin n + n^2}{n+1}$.

1. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant \dfrac{n^2-1}{n+1}$.

2. En déduire la limite de (u_n) en $+\infty$.

Corrigé commenté

1. $-1 \leqslant \sin n \leqslant 1$, donc $n^2 - 1 \leqslant \sin n + n^2 \leqslant n^2 + 1$

or $n+1 > 0$ sur $\mathbb{N}$, donc $\dfrac{n^2-1}{n+1} \leqslant \dfrac{\sin n + n^2}{n+1} \leqslant \dfrac{n^2+1}{n+1}$.

Par suite pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \geqslant \dfrac{n^2-1}{n+1}$.

2. $\dfrac{n^2-1}{n+1} = \dfrac{n^2\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{n\left(1-\frac{1}{n^2}\right)}{1+\frac{1}{n}}$ car $n \neq 0$ dans un voisinage de $+\infty$.

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(1-\dfrac{1}{n^2}\right) = \lim\limits_{n \to +\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$,

donc par produit $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{n^2-1}{n+1}\right) = +\infty$.

Par comparaison $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty.}$