

1 Représentation géométrique d'un nombre complexe

1. Ensemble des nombres complexes

Soit i le nombre tel que $i^2 = -1$

L'ensemble \mathbb{C} des nombres complexes est l'ensemble des nombres qui s'écrivent $a + ib$ où a et b sont des nombres réels.

2. Représentation géométrique d'un nombre complexe

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, à tout point M de coordonnées (a, b) , on associe le nombre complexe z tel que $z = a + ib$.

On dit que M est l'image du nombre complexe z et que le nombre z est l'**affixe** du point M .

De même, le vecteur \overrightarrow{OM} est l'image de z et z est l'affixe de \overrightarrow{OM} .

L'écriture $a + ib$ est l'écriture algébrique du nombre complexe z

L'abscisse du point M est la partie réelle de z notée $\text{Re}(z)$.

L'ordonnée du point M est la partie imaginaire de z notée $\text{Im}(z)$.

Remarque : Les parties réelle et imaginaire d'un nombre complexe sont des nombres réels.

3. Conséquences

$M(a, b)$ et $M'(a', b')$ confondus



$a = a'$ et $b = b'$



$z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ égaux



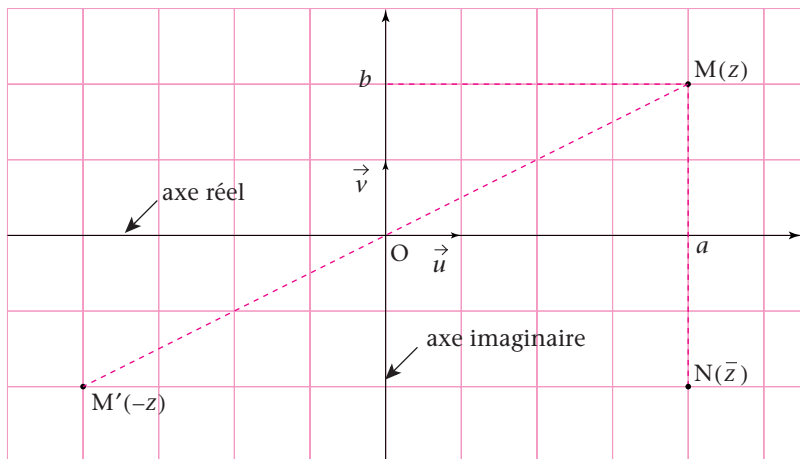
- $M = O \iff a = 0$ et $b = 0 \iff z = 0$.
- $M \in (O, \vec{u}) \iff b = 0 \iff \text{Im}(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R}$.

L'axe (O, \vec{u}) est appelé l'axe réel.

- $M \in (O, \vec{v}) \iff a = 0 \iff \text{Re}(z) = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$.

Dans ce cas on dit que z est un imaginaire pur et que l'axe (O, \vec{v}) est l'axe des imaginaires ou l'axe des imaginaires purs.

- Les points $M(a, b)$ et $M'(-a, -b)$ sont symétriques par rapport à O , leurs affixes sont opposées.
- Le point $N(a, -b)$ est l'image du nombre complexe appelé **conjugué** de z et noté \bar{z} .
- Les points $M(a, b)$ et $N(a, -b)$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.



Exemple d'application

1. Écrire les nombres complexes, affixes respectives des points : $A(0; -2)$; $B(-2; 0)$; $C(3; -2)$; $D(3; 2)$ et $E(0; 2)$.
2. Reconnaître s'il y a lieu des nombres conjugués.

Corrigé commenté

1. L'affixe du point A est $z_A = -2i$; l'affixe du point B est $z_B = -2$;
celle de C est $z_C = 3 - 2i$; celle de D est $z_D = 3 + 2i$
et celle de E est $z_E = 2i$.
2. $z_A = \bar{z}_E$ et $z_C = \bar{z}_D$.

2 Formes trigonométriques

1. Formes trigonométriques

• Soit un repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormé du plan.

Un point M distinct de O est repéré de deux façons, soit par ses **coordonnées cartésiennes** (a, b) soit par ses **coordonnées polaires** (r, θ) .

• Soit M l'image du nombre complexe z tel que $z = a + ib$. On pose $OM = r$ avec $r \geq 0$.

Le nombre positif r est appelé **module** de z et noté $|z|$.

Le nombre réel θ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. Cette mesure est définie à $2k\pi$ près avec $k \in \mathbb{Z}$ et est appelée **argument** de z et on écrit : $\arg z = \theta \pmod{2\pi}$.

Remarque : La notion d'angle de vecteurs nécessite une orientation du plan (l'orientation trigonométrique est la plus souvent utilisée.)

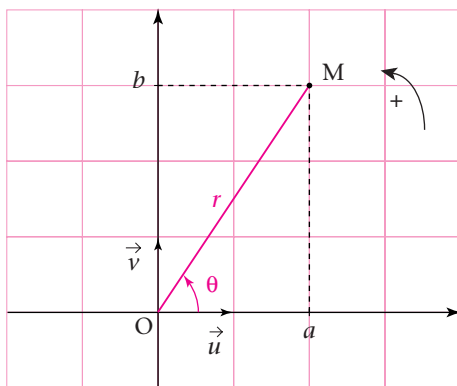
• En projetant M sur chacun des axes, on obtient :

$a = r \cos \theta$ et $b = r \sin \theta$
d'où $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ et d'après le théorème de

Pythagore

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$(r = OM = \|\overrightarrow{OM}\| = |z|)$.



Sachant que $r > 0$, on appelle forme trigonométrique du nombre complexe z l'écriture $r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

2. Propriétés du module et d'un argument d'un nombre complexe

• $z = 0 \Leftrightarrow |z| = 0$.

• $|z| = |\bar{z}| = |-z| = |-\bar{z}|$, quel que soit z .

• L'argument de zéro n'est pas déterminé.

• Si $z \neq 0$, $\arg(-z) = \arg z + \pi \pmod{2\pi}$.

• Si $z \neq 0$, $\arg(\bar{z}) = -\arg z$.

• $z = z' \Leftrightarrow r(\cos \theta + i \sin \theta) = r'(\cos \theta' + i \sin \theta') \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' \end{cases} \pmod{2\pi}$.

3. Passage de l'écriture algébrique à une forme trigonométrique

$$z = a + ib \text{ avec } |z| = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ d'où } z = |z| \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right).$$

Soit θ le nombre exprimé en radians tel que :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases} \text{ alors } z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta).$$

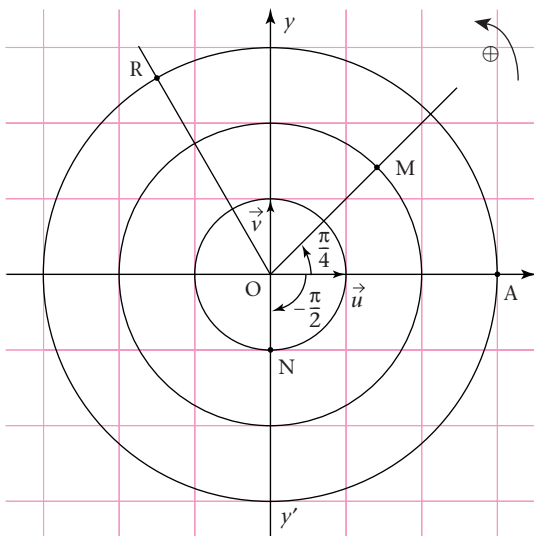
Remarque : Il est nécessaire d'avoir en tête les sinus et cosinus des valeurs particulières des angles.

Exemple d'application

Placer dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les points M, N et R définis par $OM = 2$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{\pi}{4}$ [2 π]; $ON = 1$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{ON}) = -\frac{\pi}{2}$ [2 π] et $OR = 3$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OR}) = \frac{2\pi}{3}$ [2 π].

Corrigé commenté

- Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 2 et à la bissectrice du premier quadrant.
- Le point N appartient au cercle trigonométrique et à la demi-droite $[Oy')$.
- Sur le cercle de centre O et de rayon 3, on reporte deux fois le rayon à partir de A(3; 0) dans le sens trigonométrique, on obtient ainsi le point R.



3 Opérations dans \mathbb{C}

1. Addition des nombres complexes

- L'addition des nombres complexes possède les mêmes propriétés que l'addition dans \mathbb{R} .

L'ensemble \mathbb{R} est contenu dans \mathbb{C} .

Tout nombre réel est un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle.

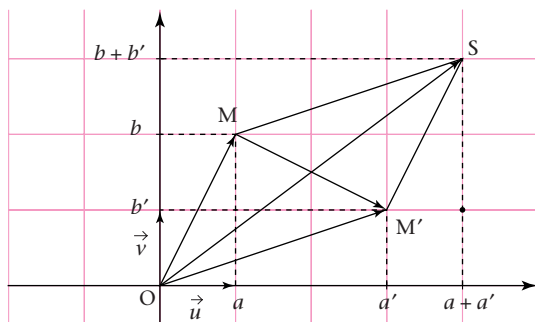
Soit les vecteurs \overrightarrow{OM} et $\overrightarrow{OM'}$ d'affixes respectives $a + ib$ et $a' + ib'$.

Le vecteur $(\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'})$ a pour coordonnées $(a + a', b + b')$ donc si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, le nombre complexe $z + z'$ est tel que

$$\operatorname{Re}(z + z') = a + a' \text{ et } \operatorname{Im}(z + z') = b + b' \text{ d'où } \boxed{z + z' = (a + a') + i(b + b')}.$$

\overrightarrow{OS} est l'image de $z + z'$.

$\overrightarrow{MM'}$ est l'image de $z' - z$.



- $\boxed{\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}; \quad z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z); \quad z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im}(z)}.$

2. Multiplication des nombres complexes

- La multiplication des nombres complexes possède les mêmes propriétés que la multiplication dans \mathbb{R} .

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' - bb' + i(ba' + ab').$$

Remarque : ayez toujours à l'esprit que $i^2 = -1$ et que i^2 ne doit pas figurer dans un résultat ni aucune autre puissance de i .

- $\boxed{\overline{z \cdot z'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}; \quad z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2 = |z|^2}$

Si $z \neq 0$ et $z' \neq 0$ et $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ et $z' = r'(\cos\theta' + i\sin\theta')$, alors $zz' = rr'(\cos(\theta + \theta') + i\sin(\theta + \theta'))$.

Donc : $|zz'| = |z| \times |z'|$ et $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$

3. Division de deux nombres complexes

La division de deux nombres complexes a les mêmes propriétés que la division dans \mathbb{R} .

- Tout nombre complexe non nul admet un inverse $\frac{1}{z}$ tel que :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+ib} = \frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}.$$

Remarque : cette écriture algébrique s'obtient en multipliant numérateur et dénominateur par le conjugué du dénominateur.

- Si $z' \neq 0$, $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'} = \frac{aa' + bb'}{a'^2 + b'^2} + i\left(\frac{a'b - ab'}{a'^2 + b'^2}\right)$

$$\text{Si } z' \neq 0, \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \text{ et } \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}, \quad \left(\frac{\bar{z}}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{z'}$$

$$\text{donc, si } z \neq 0, \quad \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \text{ et } \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg z \pmod{2\pi}.$$

Exemple d'application

Soit Z le nombre complexe tel que $Z = \frac{4-3i}{2-2i}$.

Calculer $|Z|$ et donner l'écriture algébrique de \bar{Z} .

Corrigé commenté

Indication : On applique la propriété $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

$$|Z| = \frac{|4-3i|}{|2-2i|} = \frac{\sqrt{4^2+3^2}}{\sqrt{2^2+2^2}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{8}} = \frac{5}{2\sqrt{2}} \quad \text{d'où : } |Z| = \frac{5\sqrt{2}}{4}.$$

Indication : On applique la propriété $\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{z'}$.

$$\bar{Z} = \frac{\overline{4-3i}}{\overline{2-2i}} = \frac{4+3i}{2+2i} = \frac{4+3i}{2(1+i)} = \frac{(4+3i)(1-i)}{2 \times 2} \quad \text{d'où : } \bar{Z} = \frac{7}{4} - \frac{1}{4}i.$$

Conseil : N'oubliez pas que $z\bar{z} = |z|^2$ donc que $(1+i)(1-i)$ s'écrit sans calcul 2. On pouvait aussi mettre Z sous forme algébrique et écrire ensuite \bar{Z} .

4 Formes exponentielles

1. Formes exponentielles

● Soit la fonction $f: \theta \mapsto \cos \theta + i \sin \theta$.

$$f(\theta) \times f(\theta') = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

$$f(\theta) \times f(\theta') = (\cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta') + i(\sin \theta \sin \theta' + \cos \theta \cos \theta')$$

$$f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta').$$

Donc $f(\theta) \times f(\theta') = f(\theta + \theta')$.

Cette relation fonctionnelle étant caractéristique des fonctions exponentielles on pose :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Tout nombre complexe non nul z de module r est tel que $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$.

● L'écriture $re^{i\theta}$ est une **forme exponentielle** du nombre complexe z .

Remarques :

– Cette écriture est à privilégier dans des calculs de quotients ou de puissances de nombres complexes.

– Tous les nombres complexes $e^{i\theta}$ ont pour module un et pour images des points du cercle trigonométrique.

● De part l'introduction de l'écriture exponentielle :

$$e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}; \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}; \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \text{ avec } n \in \mathbb{Z}.$$

● Formules d'Euler :

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}; \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

● $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \Leftrightarrow \begin{cases} r = r' \\ \theta = \theta' + 2k\pi \end{cases} (2\pi).$

2. Résolution d'une équation de type $z^n = a$

Si $n > 2$ avec $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$, on écrit z et a sous forme exponentielle.

Soit $z = re^{i\theta}$ et $a = \rho e^{i\alpha}$.

$$z^n = a \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta = \alpha + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta = \frac{\alpha}{n} + k\frac{2\pi}{n} \text{ avec } k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

L'équation admet alors n solutions en donnant à k , n valeurs consécutives.

Exemple d'application

Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^3 = 8i$.

Donner les solutions sous forme algébrique.

Corrigé commenté

On pose $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

$$z^3 = 8i \Leftrightarrow r^3 e^{i3\theta} = 8e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{2} + k2\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\text{soit } \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Pour $k = 0$, $z = 2e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i$;

pour $k = 1$, $z = 2e^{i\frac{5\pi}{6}} = 2\left(\cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} + i$;

pour $k = 2$, $z = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = 2\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = -2i$.

$$S_{\mathbb{C}} = \{-2i ; \sqrt{3} + i ; -\sqrt{3} + i\}.$$

5 Résolutions d'équations dans \mathbb{C}

1. Équations du premier degré

Toute équation du premier degré d'inconnue z se ramène à $az + b = 0$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Cette équation a pour solution $z = -\frac{b}{a}$.

Remarque : Il est souvent inutile de poser $z = x + iy$ et de déterminer ensuite x et y par identification des parties réelles et imaginaires.

Donner la solution sous une des trois formes algébrique, trigonométrique ou exponentielle.

2. Équations du second degré à coefficients réels

Toute équation du second degré d'inconnue z se ramène à $az^2 + bz + c = 0$ avec $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$ et $c \in \mathbb{R}$.

Discriminant Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
Solutions	$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	$x' = x'' = -\frac{b}{2a}$	$x' = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ $x'' = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

Remarques :

- Si $\Delta < 0$, les solutions sont des nombres complexes conjugués non réels.
- Veillez à ne pas introduire le nombre complexe i sous un radical.
- $\sqrt{-\Delta}$ existe si $\Delta < 0$, on peut aussi écrire $\sqrt{|\Delta|}$.

3. Équations dont le degré est strictement supérieur à 2

Les méthodes de résolution sont souvent les mêmes que dans \mathbb{R} : il faut d'abord essayer de factoriser, voir s'il y a une identité remarquable, chercher une racine évidente.

On désire donc se ramener à des produits de facteurs du premier degré ou du second degré.

Remarque : il faut penser que $1 = -i^2$ et donc que $z^2 + 1$ est factorisable dans \mathbb{C} alors qu'il ne l'est pas dans \mathbb{R} .

Exemples d'application

- 1 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $(1-i)z + 3 = -z + i$.

Corrigé commenté

On regroupe les termes faisant intervenir z :

$$(1-i)z + z = -3 + i \quad \text{soit} \quad (2-i)z = -3 + i$$

$$\text{d'où} \quad z = \frac{-3+i}{2-i} = \frac{(-3+i)(2+i)}{5} = -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i.$$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{ -\frac{7}{5} - \frac{1}{5}i \right\}.$$

- 2 Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $z^2 - z + 1 = 0$.

Corrigé commenté

Indication : on calcule $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = 1 - 4 = -3, \quad \Delta < 0;$$

on peut écrire $\Delta = 3i^2$.

Indication : on sait alors que les solutions de l'équation sont deux nombres complexes conjugués.

Conseil : ne pas oublier la valeur absolue.

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{|\Delta|}}{2a} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \bar{z}_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

$$S = \left\{ \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}; \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right\}.$$

6 Transformations ponctuelles

1. Transformation et application associée

Soit f une application définie par : $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$

$$z \mapsto f(z).$$

Le point M étant l'image de z et M' l'image de z' tel que $z' = f(z)$, on définit dans le plan la transformation T associée à f , qui à M fait correspondre M' .

2. Transformations usuelles

Soit un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ direct.

Transformation T	Éléments caractéristiques	Définitions de T avec $M' = T(M)$	Écritures complexes de T avec $M(z)$ et $M'(z')$
Translation	Un vecteur \vec{u} non nul d'affixe u	$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + u$
Homothétie	Un point Ω d'affixe ω et un réel $k \neq 0$	$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$ ou bien $z' = kz + b$ avec $b \in \mathbb{C}$
Rotation	Un point Ω d'affixe ω et un angle de mesure θ à 2π près	$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}$	$z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ ou bien $z' = e^{i\theta}z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$.
Symétrie d'axe réel	L'axe réel	$\begin{cases} OM = OM' \\ (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = -(\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \end{cases}$	$z' = \bar{z}$

Exemple d'application

Parmi les écritures complexes suivantes, reconnaître les transformations et donner pour chacune d'elles les éléments caractéristiques.

1. $z' = -6z + 2 - 3i$.

2. $z' = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)z - 4 + 2i$.

Corrigé commenté

1. **Indication** : comme le coefficient de z est -6 , alors la transformation associée est une homothétie de rapport -6 . Pour trouver son centre, qui est le seul point invariant de la transformation, on résout « l'équation aux points fixes » c'est-à-dire celle traduisant $M' = M$ donc $z' = z$.

Par suite $z = -6z + 2 - 3i$ soit $7z = 2 - 3i$,

d'où $z = \frac{2}{7} - \frac{3}{7}i$.

L'homothétie est celle de rapport -6 et de centre Ω d'affixe $\frac{2}{7} - \frac{3}{7}i$.

2. **Indication** : comme le coefficient de z est le nombre complexe $\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ dont l'écriture exponentielle est $e^{i\frac{\pi}{6}}$, alors la transformation associée à l'écriture complexe est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$.

Pour trouver son centre, on résout « l'équation aux points fixes ».

$$z = e^{i\frac{\pi}{6}}z - 4 + 2i \quad \text{soit} \quad z\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -4 + 2i \quad \text{d'où} \quad z = \frac{-4 + 2i}{1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}$$

$$\text{soit} \quad z = \frac{(-4 + 2i)\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)}{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} = \frac{-5 + 2\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} + i\frac{-\sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$$

d'où $z = -4 - \sqrt{3} - i(2\sqrt{3} + 3)$.

La rotation est celle de centre Ω d'affixe $-4 - \sqrt{3} - i(2\sqrt{3} + 3)$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

7 Interprétations géométriques

On se place dans un repère orthonormal $(O ; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Interprétation géométrique d'une égalité de modules

Soit A, B et M trois points d'affixes respectives a , b et m .

- Si $|m - a| = |m - b|$, alors $AM = MB$ ce qui signifie que le point M appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.
- Si $|m - a| = r$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, $AM = r$ donc le point M appartient au cercle de centre A et de rayon r .

2. Interprétation géométrique du quotient de deux nombres complexes

Les points M et M' ont pour affixes respectives z et z' .

- Soit $Z = \frac{z}{z'}$ avec $z \neq 0$ et $z' \neq 0$.

$$\arg Z = \arg z - \arg z' = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) - (\vec{u}, \overrightarrow{OM'}) \quad (2\pi)$$

$$\arg Z = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) + (\overrightarrow{OM'}, \vec{u}) = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM}) \quad (2\pi)$$

Remarque : un argument d'un quotient de deux nombres complexes non nuls est un angle de vecteurs.

- Soit les points $A(z_A)$, $B(z_B)$, $C(z_C)$ et $D(z_D)$ avec $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$. Alors :

$$\arg\left(\frac{z_A - z_B}{z_C - z_D}\right) = (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{BA}) \quad (2\pi)$$

3. Figures particulières

- (ABC est un triangle rectangle et isocèle direct en B) $\Leftrightarrow \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.
- (ABC est un triangle équilatéral) $\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_B| = |z_C - z_A|$.
- (ABC est un triangle équilatéral direct) $\Leftrightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- (ABC est un triangle équilatéral direct) $\Leftrightarrow \arg \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{\pi}{3}$ et $\arg \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = \frac{\pi}{3}$.
- (ABCD est un parallélogramme) $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_C - z_D$.

Exemples d'application

1 Quelle est la nature du triangle ABO sachant que les points A et B ont pour affixes respectives $\sqrt{3} + i$ et $2i$?

Corrigé commenté

Indication : on explicite le complexe Z tel que $Z = \frac{z_0 - z_A}{z_B - z_A}$, puis on en détermine son module et un argument.

$$Z = \frac{-\sqrt{3} - i}{2i - \sqrt{3} - i} = \frac{-\sqrt{3} - i}{-\sqrt{3} + i}$$

Indication : les nombres complexes $-\sqrt{3} - i$ et $-\sqrt{3} + i$ sont conjugués donc leurs modules sont égaux et leurs arguments opposés, donc $|Z| = 1$ soit :

$$|z_0 - z_A| = |z_B - z_A| \Leftrightarrow \text{OA} = \text{OB}.$$

$$\arg(-\sqrt{3} - i) = \arg\left[2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right] = -\frac{5\pi}{6} \quad (2\pi),$$

$$\text{or } \arg Z = \arg(-\sqrt{3} - i) - \arg(-\sqrt{3} + i) = 2\arg(-\sqrt{3} - i),$$

$$\text{soit } \arg Z = -2 \times \frac{5\pi}{6} \quad (2\pi) \quad \text{d'où } \arg Z = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$$

$$\text{De plus } \arg Z = \arg\left(\frac{\vec{z}_{AO}}{\vec{z}_{AB}}\right) = \arg(z_{AO}) - \arg(z_{AB})$$

$$\text{soit } \arg Z = (\vec{u}, \vec{AO}) - (\vec{u}, \vec{AB}) = (\vec{AB}, \vec{AO})$$

$$\text{d'où } (\vec{AB}, \vec{AO}) = \frac{\pi}{3} \quad (2\pi).$$

Par suite le triangle AOB est équilatéral.

2 Soit A, B et C les points d'affixes respectives $1 + 2i$, $-2 + i$ et $-1 - 2i$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

Corrigé commenté

Il est souhaitable de placer les points dans un repère pour bien poser le problème.

On calcule le nombre complexe Z tel que $Z = \frac{\vec{z}_{BA}}{\vec{z}_{BC}}$.

$$Z = \frac{1 + 2i - (-2 + i)}{-1 - 2i - (-2 + i)} = \frac{3 + i}{1 - 3i} = \frac{(3 + i)(1 + 3i)}{10},$$

$$\text{d'où } z = \frac{10i}{10} = i; \text{ on en déduit que } (\vec{BC}, \vec{BA}) = \frac{\pi}{2} \quad (2\pi).$$

$$\text{De plus } |i| = 1 \Leftrightarrow \|\vec{BA}\| = \|\vec{BC}\| \Leftrightarrow \text{BA} = \text{BC}.$$

Le triangle ABC est donc rectangle et isocèle en B.